1. Jelöljük az n-edik heti betétet b_n-nel és a továbbiakban ismétlődő $b_3 - b_2$ heti növekedést (ami az l. és 2. hét között, úgy látszik, még nem érvényes) d-vel. Ekkor b_1, b_2 és d kiszámításához elég az (1), (2), (3) egyenletrendszer. Ugyanis a betét hetenként d-vel való növelése alapján

$$\begin{aligned} &b_3 = b_2 + d, && b_4 = b_3 + d = b_2 + 2d, && && b_5 = b_2 + 3d, \\ &b_6 = b_2 + 4d, && b_7 = b_2 + 5d, && b_8 = b_2 + 6d, && b_9 = b_2 + 7d, \end{aligned}$$

így a persely tartalma az egyenletekben szereplő hetek végén:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} P_3 = b_1 + b_2 + b_3 & = b_1 + 2b_2 + d, \\ P_4 = P_3 + b_4 = P_3 + (b_2 + 2d) & = b_1 + 3b_2 + 3d \\ P_5 = P_4 + (b_2 + 3d) & = b_1 + 4b_2 + 6d \\ P_7 = P_5 + (b_2 + 4d) + (b_2 + 5d) & = b_1 + 6b_2 + 15d, \\ P_8 = P_7 + (b_2 + 6d) & = b_1 + 7b_2 + 21d, \\ P_9 = P_8 + (b_2 + 7d) & = b_1 + 8b_2 + 28d \end{cases}$$

ezekkel pedig (1)–(3) így alakul (mindjárt rendezve is):

$$\text{(1')} \qquad 4d = b_1,$$
$$\text{(2')} \qquad b_2 + 4d = 20,$$
$$\text{(3')} \qquad 10d = b_1 + b_2$$

Innen egyszerű számítással (mindent Ft-ban értve)

$$\text{(5)} \qquad d = 2, \qquad b_1 = 8, \qquad b_2 = 12.$$

2. A heti növekedés alapján $n \geq 2$ esetén minden heti betétre érvényes:

$$\text{(6)} \qquad b_n = b_2 + (n-2)d,$$

hiszen a 2. héttől az n-edik hétig $(n-2)$ hét telt el, ennyiszer d-vel lett nagyobb a betét. Azt sejtjük továbbá, hogy a persely tartalma az n-edik betét után

$$\text{(7)} \qquad P_n = b_1 + (n-1)b_2 + d\{1 + 2 + \ldots + (n-3) + (n-2)\}.$$

Ugyanis a pénzkészlet hetenkénti megszámlálásának könnyítésére (6) alapján elképzelhetjük, hogy az apa a 2. héttől kezdve minden héten b_2 értéket úgy tett be, hogy összecsomagolt egy 10 Ft-ost és egy 2 Ft-ost, ilyen csomag tehát mindig 1-gyel kevesebb van benn, mint a hét sorszáma, továbbá a hét sorszámánál 2-vel kevesebb db $d = 2$ Ft-ost is összecsomagolva tett be, ezeknek a darabszámoknak a { }-ben álló összegével kell tehát csak d-t szoroznunk a készlet megállapítása céljára.

Valóban, ugyanezzel az eljárással lehet kiszámítani a következő hét végén is a persely tartatmát:

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n + b_{n+1} = P_n + (B_2 + (n-1)d) = \\ = b_1 + nb_2 + d\{1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)\}. \end{aligned}$$

3. A (7) kapcsos zárójelében álló összeget egyszerűbben lehet kiszámítani szorzással. Bebizonyítjuk, hogy

$$S_{n-2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

vagyis az utolsó összeadandót szorozzuk a nála 1-gyel nagyobb számmal és a szorzatot osztjuk 2-vel. Ennek helyességét a $0 < n - 2 \leq 7$ esetekre a (4) táblázatban látjuk. Valóban, 1-gyel tovább menve

$$S_{n-1} = S_{n-2} + (n-1) = (n-1)\left(\frac{n-2}{2} + 1\right) = \frac{(n-1)n}{2},$$

tehát a mondott szabályszerűség minden természetes számról átöröklődik a rá következőre.

4. Ezek szerint, felhasználva az (5) értékeket:

$$\text{(8)} \qquad P_n = b_1 + (n-1)b_2 + \frac{d}{2}(n-2)(n-1) = n^2 + 9n - 2,$$

erről a kifejezésről kell megállapítanunk, hogy mely n értékek mellett ad négyzetszámot. Ha csak egyetlen ilyen érték van, akkor Miki jóslata helyes.

A tekintetbe jövő n-ekre $P_n > n^2$, keressük ezért a négyzetszám alapját $(n+t)$ alakban, ahol persze t is természetes szám. Így

$$P_n = n^2 + 9n - 2 = (n+t)^2\text{-ből} \qquad t^2 = (9-2t)n - 2,$$

eszerint csak azok a t értékek jönnek szóba, amelyekre

$$9 - 2t > 0, \qquad t = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

és az egyenletből

$$n = \frac{t^2+2}{9-2t}.$$

Ez a kifejezés a négy érték közül egyedül $t = 4$ esetében ad egész számot és ekkor $n = 18$.

Ezek szerint Miki a 18. héten találta négyzetszámnak a persely $P_{18} = 484 = (18+4)^2$ tartalmát, és ezután többet sohasem lesz P_n négyzetszám.

Megjegyezzük végül, hogy Miki fel nem használt oszthatósági észrevételei a talált megoldásban teljesülnek a persely bármely heti $P_n (n \geq 2)$ tartalmára és P_1-re is. (8) szerint írható: $P_n = n(n+9) - 2$, és ez mindig páros, hiszen n és $(n+9)$ egyike páros, tehát a szorzatuk is páros; másrészt sohasem osztható 3-mal, mert P_n-nek második tagja osztható vele, $n^2 - 2$ viszont nem, hiszen $n^2 - 2$ az $n = 3k$, $3k+1$, $3k+2$ alakok mellett rendre $3(3k-1)+1$, $3(3k^2+2k-1)+2$ és $3(3k^2+4k)+2$ alakú.

Megjegyzés. (8) megállapítása után eljárhatunk az alábbiak szerint is. Mivel van olyan e egész szám, hogy

$$P_n = n^2 + 9n - 2 = e^2, \qquad n^2 + 9n - (e^2+2) = 0,$$

és hogy (a kérdéses héten is) n természetes szám következik, hogy az egyenlet diszkriminánsa egy f egész szám négyzete:

$$81 + 4(e^2+2) = 4e^2 + 89 = f^2,$$
$$f^2 - 4e^2 = (f-2e)(f+2e) = 89.$$

Ámde a 89 prímszám, tehát ez lényegében csak egyféleképpen lehetséges, ti. ha

$$f - 2e = 1, \qquad f + 2e = 89,$$

amiből $e = 22$, $f = 45$ és $n = 18$. (Ugyanezt kaptuk volna a $89 = (-1)(-89)$ felbontásból is, vagy az $f - 2e = 89$, $f + 2e = 1$ egyenletrendszerből is, mert e-nek és f-nek csak az abszolút értéke lényeges.)