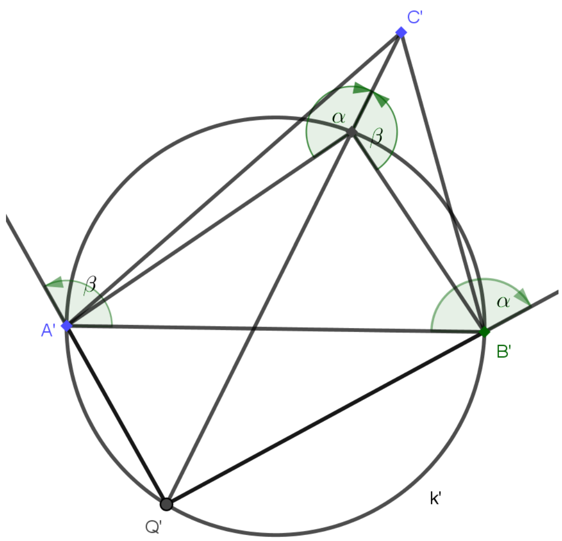
1. Az A, B, C alappontok egyenrangúak, mégha a látószögek megadásában a PC félegyenes kétszer szerepel is PA és PB egyszeri szereplésével szemben. Ugyanis a terepen ott állva, látjuk P helyzetét az ABC háromszöghöz viszonyítva, és α és β kapcsolatát az AB oldal $180°$-nál nem nagyobb $APB\sphericalangle = \gamma$ látószögével. A háromszög belsejében és az oldalszakaszain levő pontokban e 3 látószög összege $360°$. (P-t az A, B, C pontoktól természetesen különbözőnek tekintjük.) Ha pedig P kívül van a háromszögön, akkor valamelyik két látószög összege egyenlő a harmadikkal, akár a háromszög valamelyik szögének a csúcstartományában fekszik P, akár valamelyik oldalszakasszal szomszédos ún. serpenyőtartományokban. Ezekben a helyzetekben tehát válaszhatjuk úgy az alappontok és a megfelelő látószögek betűzését, hogy $\alpha + \beta = \gamma$ legyen; más szóval: hogy C benne legyen a $180°$-nál kisebb APB szögtartományban. Továbbá mindegyik ábránkon úgy választottuk a betűzést, hogy a PA félegyenest negatív, PB-t pedig pozitív irányú és α, ill. β Abszolút értékű elfordítás vigye át a PC félegyenesbe.

Bizonyításunkat 3 részben végezzük az AB, BC, CA egyenesekkel felosztott sík említett 3-féle tartománya szerint.

2. Legyen először P az ABC háromszög belsejében, ekkor $180° < \alpha + \beta < 360°$, és természetesen P' az $A'B'C'$ háromszögben lesz (1. ábra).



1. ábra

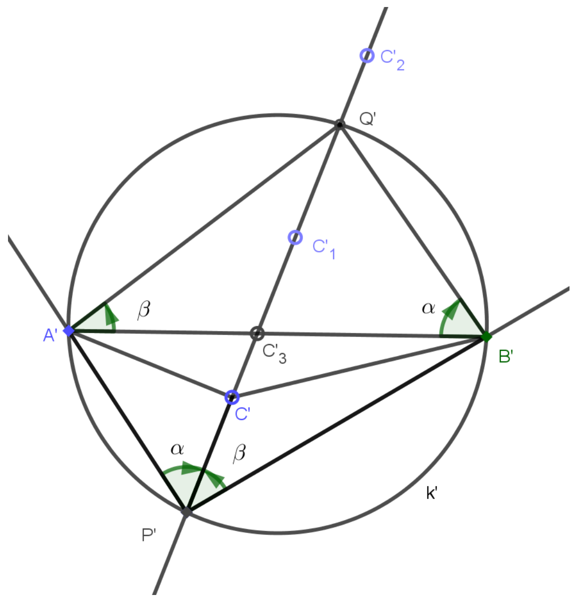
Amikor az $A'B'$ félegyenest A' körül és a $B'A'$ félegyenest B' körül elfordítjuk, a $-180° < -\alpha < 0°$ illetve $0° < \beta < 180°$ szöggel, ezek az $A'B'$ egyenesnek azon a partján haladnak, amelyikben C' van (és P' lesz), és eközben túlfordulnak azon a helyzeten, amelyben párhuzamosak egymással. Így a kívánt Q' metszéspontot a visszafelé való meghosszabbításaik határozzák meg, vagyis Q' az $A'B'$ egyenesnek C'-t nem tartalmazó partján adódik. Az $A'B'Q'$ háromszög első két csúcsánál rendre $180° - \beta$, $180° - \alpha$ nagyságú szög van, így Q'-nél:

$$B'Q'A'\sphericalangle = 180° - (360° - \beta - \alpha) = \alpha + \beta - 180° = (360° - \gamma) - 180° = 180° - \gamma = 180° - A'P'B'\sphericalangle.$$

Ezek szerint az $A'Q'B'P'$ négyszög konvex húrnégyszög, P' valóban rajta van az A', B', Q' pontokkal meghatározott k' körön, ami az állítás első része.

Továbbá $Q'P'B'\sphericalangle = Q'A'B'\sphericalangle = 180° - \beta$, ami kiegészítő szöge a mért $B'P'C'\sphericalangle = \beta$-nak, tehát a $Q'C'$ egyenes valóban átmegy P'-n, és ez az állítás második része.

3. Ha P a C-nél levő csúcsszögtartományban van, akkor P' és C' ismét az $A'B'$ egyenesnek ugyanazon a partján vannak, másrészt $0° < \alpha + \beta < 180°$ (2. ábra).



2. ábra

Emiatt az elforduló félegyenesek $A'B'$-nek C'-t nem tartalmazó partján haladnak, és Q' is a túlsó parton keletkezik:

$$A'Q'B'\sphericalangle = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - A'P'B'\sphericalangle,$$

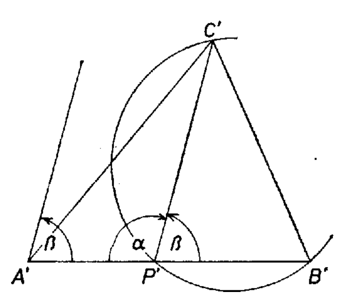
P' ismét az $A'B'Q' = k'$ körön van, másrészt $Q'P'B'\sphericalangle = Q'A'B'\sphericalangle = \beta$, tehát P-ből Q-t a C mögött látjuk. Az állítás ekkor is helyes.

4. Utóbbi felvételünkből C-nek a PC félegyenesen való kellő távolításával kiadódik az a helyzettípus, hogy P az AB oldallal szomszédos serpenyőtartományban van (2. ábra, C_1' és C_2'), meggondolásunk erre a helyzetre is bizonyítja az állítást. Úgyszintén arra a helyzetre is, amelyben a 3 alappont egy egyenesen van; ekkor betűzési megállapodásunk szerint C_3' az $A'B'$ szakasz belső pontja.

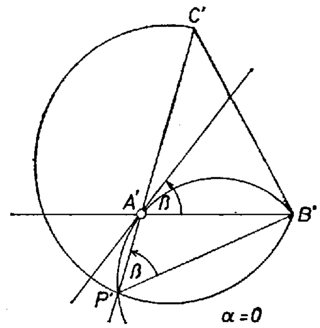
5. Mindegyik áttekintett helyzetben a Q' pont és az $A'B'Q'$ kör egyértelműen létrejön, és ez áll az első két helyzetben a $Q'C'$ egyenesre is, mert meghatározó pontjai $A'B'$-nek két különböző partján vannak. A legutóbbi helyzetben is csak abban a kivételes esetben válik határozatlanná a $Q'C'$ egyenes, ha Q' éppen azonosnak adódik C'-vel. Ekkor P' az $A'B'Q' \equiv A'B'C'$ háromszög körülírt körén van, és természetesen a terepen P az ABC háromszög k_0 körülírt körén. Ezt a k_0 kört a geodéziai gyakorlatban röviden *veszélyes* körnek nevezik, ami pontosabban ezt jelenti: bármely A, B, C ponthármas használhatatlan a köréje írt körön levő pontok helyzetének meghatározására szerkesztésünk, vagyis a hátrametszés vizsgált módosítása mellett. Ha A', B', C egy egyenesen vannak, akkor maga ez az egyenes veszi át a veszélyes kör szerepét – ez C-nek az AB egyeneshez való fokozatos közelítésével látható –, ennek pontjaira α és β értéke 0° vagy az egyiké 180°, és ebből sem határozható meg P' helyzete. (Gyakorlatilag a veszélyes körhöz a serpenyőtartományokban közel fekvő pontok meghatározása is pontatlan, mert Q' közel adódik C'-höz.)

Eredményünkből tüstént látjuk, hogy a veszélyes kör pontjai az eredeti szerkesztéssel sem határozhatók meg, hiszen minden ilyen pontra az $A'C'$-hez tartozó α nyílású és a $B'C'$-hez tartozó β nyílású látókörívek középpontjai egybeesnek, a két körívnek $A'B'$ részíve közös. És fordítva: ha P nincs rajta a veszélyes körön, akkor a két ív középpontja különböző és C'-től különböző közös pontjuk meghatározza P'-t.

6. Eddig figyelmen kívül hagytunk két speciális helyzetet: ha $\alpha+\beta = 180^\circ$, és azt is, ha α és β egyike 0°; pl. $\alpha = 0^\circ$ azt jelenti, hogy P az AC oldal valamelyik meghosszabbításán van. Eszerint $\alpha+\beta = 180^\circ$ mellett α és β egyike sem 0, ekkor pedig P az AB szakaszon van. Így mindkét esetben az eredeti szerkesztésből elég használni a β nyílású körívet. (Reális felvételben természetesen $\beta > B'A'C'\sphericalangle$, 3. ábra, illetve $\beta < B'A'C'\sphericalangle$, 4. ábra.) – A bizonyított eljárásban a 3. ábrán Q' eleve nem jöhet létre, viszont $C'P'$ párhuzamos az $A'B'$-nek A' körül β szöggel elfordított állásával; a 4. ábra helyzetében Q' azonosnak adódik A'-vel, a segédkör határozatlan, a szabály – csak a betűt nézve – nem használható. (Ha viszont határátmenettel az A' körül β szöggel elfordított egyenest érintő és B'-n átmenő kört vesszük segédkörnek, az eljárás érvényes marad.)



3. ábra



4. ábra

7. Könnyű mindezek után belátni, hogy az alappontok és a látószögek tetszőleges betűzése esetén is érvényes a szerkesztő eljárás és a mértani hely megállapítása.

Megjegyzés. Az eljárás lényege az, hogy az alapelvben 2 körrel végzett szerkesztés helyett célhoz érünk csupán 1 körrel; igaz viszont, hogy 3 egyenest kell rajzolnunk. Ez mégis könnyebb. – A vizsgált eljárást a geodéziában *Colin*-féle szerkesztésnek nevezik.