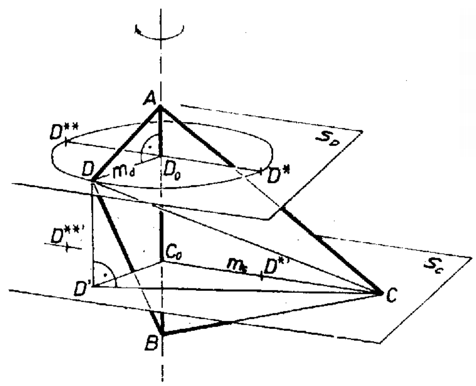
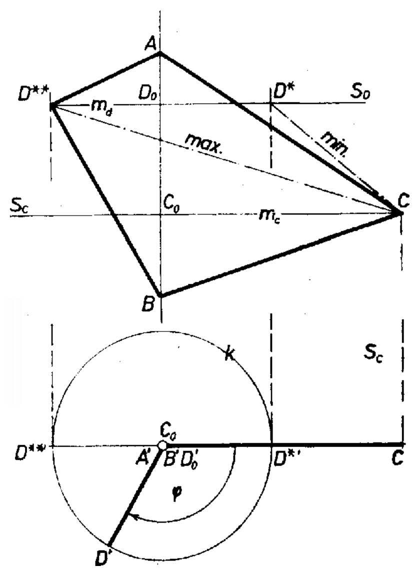
1. Először méretek nélkül jellemezzük az ABD háromszögnek azokat a helyzeteit, amelyekben a CD távolság a lehetséges legkisebb, ill. legnagyobb értékét veszi föl. A háromszög forgása közben D kört ír le, melynek S_D síkja merőleges az AB tengelyre, középpontja D-nek a tengelyen levő D_0 vetülete (a háromszög D-ből húzott magasságának talppontja), és sugara a $D_0D = m_d$ magasság.



1. ábra

Ez a pálya két pontban metszi az ABC háromszög síkját, egy, az AB egyenes C-t tartalmazó partján levő D^* pontban és ennek D_0-ra való D^{**} tükörképében. Azt állítjuk, hogy CD^* a távolság keresett minimumát, CD^{**} a maximumát adja, más szóval: akkor a legkisebb a CD távolság, ha az ABD félsíknak az ABC félsíkhoz való φ hajlásszöge 0° (egybeesnek), a legnagyobb pedig $\varphi = 180^\circ$ esetén, – a félsíkokat úgy értve, hogy határoló egyenesük az AB forgástengely (1. ábra).

Vetítsük ugyanis D mozgását a C-n átmenő, AB-re merőleges S_C síkra (más szóval: nézzük a forgást az AB egyenes irányából (2. ábra alsó fele).



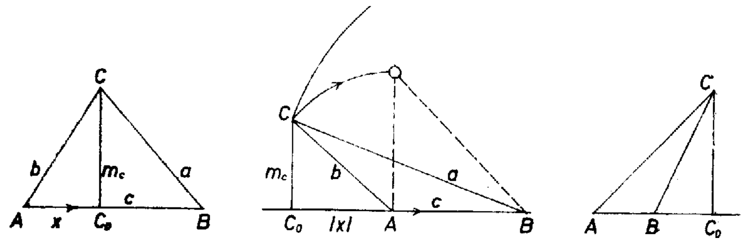
2. ábra

A D' vetület szintén egy m_d sugarú k körön mozog, mert S_C párhuzamos S_D-vel, k középpontja D_0-nak a vetülete, ami egyszersmind AB döféspontja S_C-n, tehát azonos C-nek AB-n levő C_0 vetületével. A CDD' háromszögben a $CD'D$ szög derékszög, a $D'D$ befogó állandó, mert egyenlő S_C és S_D távolságával, C_0D_0-lal, ennélfogva a CD átfogó akkor a legkisebb, ill. a legnagyobb, ha CD a legkisebb, ill. a legnagyobb. Márpedig k-nak C-höz legközelebbi pontját a C_0C félegyenes jelöli ki, és ez éppen D^*-nak S_C-n levő $D^{*'}$ vetülete, k-nak C-től legtávolabbi pontját pedig CC_0 nak C_0-on túli meghosszabbítása metszi ki, ami D^{**}-nak $D^{**'}$ vetülete.

Amennyiben S_C azonos S_D-vel, vagyis C_0 azonos D_0-lal, úgy a vetítésre nincs szükség.

Nem volna sem minimuma, sem maximuma CD-nek, ha C azonos volna C_0-lal, vagy D azonos volna D_0 lal, ilyen esetben azonban az ABC, ill. az ABD háromszög egyenes szakasszá elfajult volna; ettől eltekinthetünk.

2. Legyenek háromszögeink oldalai: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $BD = a_1$, $DA = b_1$. Tekintsük továbbá az A-ból B-be mutató irányt pozitívnak és legyen előjellel együtt $AC_0 = x$ (vagyis negatív, ha C_0 az AB-nek A-n túli meghosszabbításán van, 3. ábra).



3. ábra

Ekkor hasonlóan $C_0B = c - x$ (negatív, ha C_0 a B-n túli meghosszabbításon van). Az ACC_0, BCC_0 derékszögű háromszög AB-n fekvő befogója mindenképpen $|x|$, ill. $|c-x|$, így a CC_0 magasságra

$$CC_0^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2, \quad \text{amiből}$$

(1) $$x = AC_0 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Ez a kifejezés AC_0-t, AC-nek AB-n levő vetületét valóban előjelével együtt adja meg: x negatív, ha a „elég nagy”, vagyis az A-ban AB-re emelt merőleges elválasztja C-t és B-t. (Ha pedig éppen átmegy C-n, akkor $BAC\sphericalangle = 90°$ és x számlálója 0. Hasonlóan látható, hogy lehet $x > c$, azaz $c - x < 0$ is.

(1) alapján kifejezhető az oldalakkal a $C_0C = m_c$ magasság is.

(1)-be a és b helyére a_1-et, ill. b_1-et írva ugyanígy AD előjeles hosszát kapjuk, és ugyanezen betűcserékkel m_c kifejezése $D_0D = m_d$ kifejezésévé alakul át az ABD háromszög oldalaival. E két magasságot négyzetgyökvonás adja meg, ezért abszolút értékben értendők.

Ezekből az 1. pontban mondottak szerint a CDD' háromszög AB-vel párhuzamos befogóját, valamint S_C-beli befogóját a minimum esetére abszolút értékben kapjuk:

$$D'D = C_0D_0 = |AD_0 - AC_0|,$$
$$CD^{*'} = |C_0C - C_0D^{*'}| = |m_c - m_d|,$$

végül az S_C-beli befogó a maximum esetében

$$m_c + m_d.$$

Ezekből CD legkisebb és legnagyobb értékének négyzete Pitagorasz tétele alapján számítható, tehát abszolút érték jelet nem tartalmazó kifejezésként adódik az a, b, c, a_1, b_1 méretekből.

Kifejezhetjük a magasságokat az oldalakkal az ún. Heron-képlet[1] alapján is.

[1] Lásd az iskolai Függvénytáblázatok 331.21. képletét.