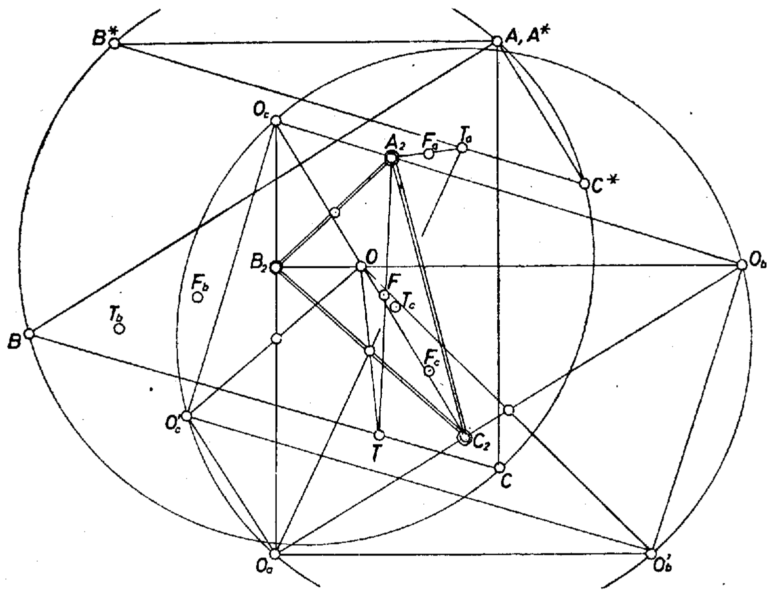
Az 1371. gyakorlat szövege a következő volt: Az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai rendre A_1, B_1, C_1. Adva van (helyzet szerint) az AB_1C_1, a BC_1A_1 és a CA_1B_1 háromszög magasságpontja. Szerkesszük meg a háromszöget. – A megoldás menete a következő volt. Jelöljük az adott magasságpontokat (H_2 csúcsait) rendre A_2-vel, B_2-vel és C_2-vel, a H_2 háromszögbe írható kör középpontját O-val, a háromszöghöz hozzáírható körök középpontjait O_a-val, O_b-vel és O_c-vel. Tükrözzük az O pontot a B_2C_2 szakasz felezőpontjára, a kapott pontot jelöljük T-vel, és az O_a, O_b, O_c pontokat tükrözzük az A_2T szakasz F felezőpontjára: a kapott három tükörkép lesz a keresett háromszög három csúcsa. További megoldásokat kapunk, ha O helyére az O_a, O_b, O_c valamelyikét választjuk, és a választott pont helyére O-t tesszük. A jelen feladatunk megoldásának az alapgondolata az lesz, hogy megvizsgáljuk, milyen következményekkel jár ez a szerepcsere.

Válasszuk mondjuk O_a-t O helyett: O_a-nak a B_2C_2 szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe legyen T_a, és az A_2T_a szakasz felezőpontja legyen F_a. Ekkor a keresett háromszög csúcsai az O, O_b, O_c pontoknak az F_a-ra vonatkozó tükörképei lesznek.



1. ábra

A T és F pontok szerkesztése szerint

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OT}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OB}_2 + \overrightarrow{OC}_2\right),$$

amint ezt már az 1371. gyakorlat megoldása során megjegyeztük. Hasonlóan látható, hogy

$$\overrightarrow{O_aF}_a = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_2A}_2 + \overrightarrow{O_aB}_2 + \overrightarrow{O_aC}_2\right),$$

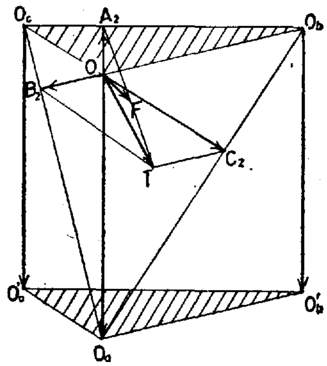
tehát

$$\overrightarrow{FF}_a = \overrightarrow{OF}_a - \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OO}_a + \left(\overrightarrow{O_aF}_a - \overrightarrow{OF}\right) = \overrightarrow{OO}_a - \frac{3}{2}\,\overrightarrow{OO}_a = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{OO}_a.$$

Ismeretes, hogy egy tetszőleges P pontnak az F_a-ra vonatkozó tükörképét úgy is megkapjuk, ha előbb eltoljuk a $2\overrightarrow{F_aF}$ vektorral, majd tükrözzük a kapott pontot F-re. Alkalmazzuk ezt az eljárást az O, O_b, O_c, pontokra: toljuk el először őket a $2\overrightarrow{F_aF} = \overrightarrow{OO_a}$ vektorral, és a kapott pontokat tükrözzük F-re. Az eltolás O-t O_a-ba, O_b-t és O_c-t pedig azokba az O'_b, O'_c pontokba viszi, amelyekre (2. ábra)

$$\overrightarrow{OO}_a = \overrightarrow{O_bO'}_b = \overrightarrow{O_cO'}_c,$$

tehát amelyeket O-nak az O_aO_b, O_aO_c szakaszok felezőpontjára való tükrözésével is megkaphatunk.



2. ábra

Mivel O az $O_aO_bO_c$ háromszög magasságpontja, azért O'_b, O'_c rajta van az $O_aO_bO_c$ háromszög köré írható körön, vagyis az $O_aO_bO_c$ és $O_aO'_bO'_c$ háromszögek köré írható kör azonos. Nem változtat ezen az F pontra való tükrözés sem: az O-ból és O_a-ból kapott háromszögek (az 1. ábrán ABC, illetve $A^*B^*C^*$, ahol A^* azonos A-val) köré írható kör tehát azonos.

A fenti meggondolásban O_a-t O_b-vel, majd O_c-vel, felcserélve kapjuk annak a bizonyítását, hogy a másik két háromszög köré írható kör is azonos az első háromszög köré írható körrel, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy a legutóbb talált B^* pont a közös körülírt körön a B-vel átellenes pont, a kör középpontja azonos a H_2 háromszög magasságpontjával, továbbá hogy az adódott ABC háromszög A-ból induló magasságának A_1 talppontja azonos T-vel, $A^*B^*C^*$-ban pedig A^* vetülete B^*C^*-ra azonos T_a-val.