I. megoldás. A negyedik szám páros, ezért a harmadik páratlan, tehát 5-re végződik, így számaink utolsó jegye rendre 3, 4, 5, 6, és bennük a követelmény szerint a magasabb értékű helyeken is csak ez a négyféle számjegy fordulhat elő.

Mivel a negyedik szám osztható 4-gyel és egyes értékű számjegye 6-os, ezért a tízes értékű jegye páratlan, tehát vagy 5-ös, vagy 3-as. Így a számnégyest a következő két alak valamelyike adja meg:

$$\begin{array}{lllll} A: & 100k+33, & 100k+34, & 100k+35, & 100k+36, \\ B: & 100m+53, & 100m+54, & 100m+55, & 100m+56, \end{array}$$

ahol k és m alkalmas egészek. Célszerűbbnek látszik az első alak, mert 33 osztható 11-gyel, eszerint olyan k-t keresünk, amely 11-gyel osztható, a jegyei a 3, 4, 5, 6 jegyek közül valók, továbbá amelyre

$$100k+34=98k+35+2k-1, \qquad \text{azaz} \qquad x=2k-1$$

osztható 7-tel. Mivel k egy $11n$ alakú szám, azért

$$x=2k-1=22n-1=21n+(n-1),$$

ez akkor osztható 7-tel, ha $(n-1)$ osztható 7-tel. A $11n$ szorzást a szokásos séma szerint elvégezve, azaz k-t $k=10n+n$ alakra hozva látjuk, hogy n első és utolsó jegye ugyancsak a keresett 3, 4, 5, 6 jegyek közül való. Így n nem lehet egyjegyű, mert $(n-1)$ nem osztható 7-tel az $n=3$, 4, 5, 6 számokra. Kétjegyű sem lehet n, mert ekkor k középső jegye egyenlő n első és utolsó jegyének az összegével, erre a jegyre itt csak $3+3=6$ jön szóba, és ekkor $n=33$ volna, amire $(n-1)$ nem osztható 7-tel.

Ha n háromjegyű, mondjuk

$$n=100a+10b+c,$$

akkor a és c a 3, 4, 5, 6 jegyek közül való, és azt, hogy $11n$ jegyei is ezek közül valók legyenek, úgy biztosíthatjuk legegyszerűbben, hogy b értékét 0-nak választjuk. Az $a=3$ választás mellett az $(n-1)$-re adódó 302, 303, 304, 305 számok egyike sem osztható 7-tel. Az $a=4$ értékhez tartozó 402, 403, 404, 405 számok között sincs 7-tel osztható, de az 502, 503, 504, 505 között már van: az $(n-1)=504$ szám. Ennek az

$$n=505, \qquad k=5555$$

paraméterpár, és az

$$555\,533, \qquad 555\,534, \qquad 555\,535, \qquad 555\,536$$

számnégyes felel meg, melyről a kívánt oszthatóságok egy kivételével azonnal látszanak. A nem triviális oszthatóság is teljesül: $555\,534:7=79\,362$.

Megjegyzés. A kapott számnégyes nem a legkisebb. Az A típusúak között kisebb szám a 355 333 kezdőszámú négyes.

II. megoldás. Most B típusú számnégyest keresünk (lásd fent). Nem lehet m egyjegyű szám, mert 353, 453, 553 és 653 egyike sem osztható 11-gyel.

Kétjegyű sem lehet m, ugyanis $m=1OD+C$ esetében az első szám így alakítható:

$$100m+53=11(91D+9C+5)+(C-D-2),$$

itt a megengedett jegyek mellett $C-D$ értéke $+3$ és -3 közti szám, tehát csak $C-D=2$, azaz $D=C-2$ esetén áll be a 11-gyel való oszthatóság. Azonban a $100m+54$ szám sem $C=5$ és $D=3$ esetében, sem $C=6$ és $D=4$ esetében nem többszöröse a 7-nek.

Háromjegyű m-mel viszont sikeres a próbálkozás. Ugyanis $m=100E+10D+C$ mellett az első szám:

$$100m+53=11(909E+91D+9C+5)+(E+C-2-D).$$

Itt a második tag korlátai:

$$\begin{aligned} E+C-2-D &\geqq 3+3-2-6=-2 \text{ és} \\ E+C-2-D &\leqq 6+6-2-3=7, \end{aligned}$$

köztük csak a 0 többszöröse a 11-nek, ez a tag tehát csak úgy osztható 11-gyel, ha

$$E+C-2-D=0, \qquad D=E+C-2. \tag{1}$$

Másrészt ekkor a második szám

$$100m+54=7(1428E+143D+14C+8)+(4E-D+2C-2),$$

itt a második tag (1) felhasználásával $3E+C$, ami 12 és 24 közti érték, osztható 7-tel, ha $3E+C=14$, $C=5$ és $E=3$, ami (1)-ből $D=6$-ra vezet. Valóban, a

$$36\,553, \qquad 36\,554, \qquad 36\,555, \qquad 36\,556$$

számnégyes megfelel mindegyik feltételnek. Ezzel eleget tettünk a feladat követelésének.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy új megfelelő számnégyest kapunk, ha a találtak elé írjuk 77-nek olyan többszörösét, amely csak a 3, 4, 5, 6 számjegyeket tartalmazza. Ilyenek négy és öt jeggyel (szorzótáblázatból):

$$3465, \quad 4466, \quad 4543, \quad 5544, \quad 6545, \quad \text{ill.}$$
$$35\,343, \quad 36\,344, \quad 45\,353, \quad 46\,354, \quad 55\,363, \quad 56\,364,$$

hat jeggyel pedig bármely $FGHFGH$ szám, hiszen ez $1001\cdot FGH=77\cdot 13\cdot FGH$. (A négy- és ötjegyűek közt is vannak 1001, ill. 10 010 különbségű párok.)