Elég azt megmutatnunk, hogy az adott kifejezés egyenlő az x, y, z változók egy P polinomjának a négyzetével: $K=P^2$, más szóval, hogy a P alap előállítható x, y, z-ből és állandó egész számokból összeadás és szorzás útján.

K szimmetrikus függvénye a három változónak. Ezen azt értjük, hogy bármelyik két betűt fölcserélve, K értéke változatlan marad. Ezt várjuk P-re is. Ennek megmutatását egyszerűbbé teszi, ha K-t kifejezzük x, y és z ún. *elemi* szimmetrikus függvényeivel – amelyekben mind a három változó csak az első hatványon szerepel. Ez a következő három:

$$x+y+z=s_1, \qquad xy+yz+zx=s_2, \qquad xyz=s_3$$

(az s melletti index a fokszámot jelöli). Valahányszor x, y és z egészek, mindannyiszor s_1, s_2 és s_3 is egészek. Ezekkel

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=s_1^2-2s_2,\\
&x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y)=\\
&\quad=s_1(s_1^2-2s_2)-\big\{(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz\big\}=\\
&\quad=s_1^3-2s_1s_2-\{s_1s_2-3s_3\}=s_1^3-3s_1s_2+3s_3,
\end{aligned}$$

tehát

$$K=9(s_1^2-2s_2)^2-8s_1(s_1^3-3s_1s_2)=s_1^4-12s_1^2s_2+36s_2^2=\left(s_1^2-6s_2\right)^2,$$

és itt $P=s_1^2-6s_2$ a föltevés szerint egész szám. Ezt akartuk bizonyítani.

A négyzetszám alapja így is írható:

$$P=x^2+y^2+z^2-4(xy+yz+zx).$$