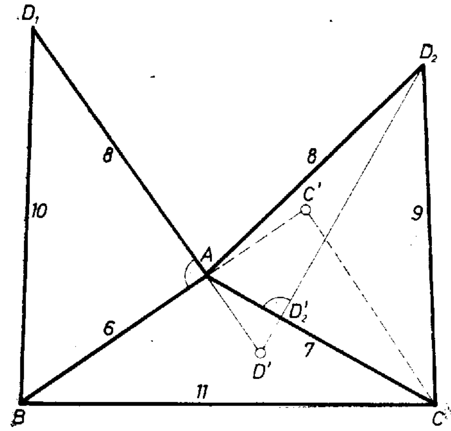
Állítsuk elő a tetraéder A csúcsában összefutó 3 lapjának papírmodelljét. Oldalaikból megszerkesztjük papírlemezen az ABC háromszöget, majd az ABD-vel egybevágó ABD_1 háromszöget, és az ACD-vel egybevágó ACD_2-t úgy, hogy az utóbbi kettő az AB, ill. AC közös él mentén csatlakozzék az elsőhöz, és mind a 3 háromszögünk az adott tetraéderen kívülről látható lapnak a tükörképe legyen (ellentétes körüljárással, ahogyan a lapokat belülről látnánk, 1. ábra).



1. ábra

Jelöljük D'-vel a D_1-ből AB-re és a D_2-ből AC-re bocsátott merőlegesek metszéspontját.

A 3 lap együttesét kivágva, fordítsuk az ABD_1 lapot AB mint tengely körül az ABC alapsík fölé, így D_1 a D_1D' egyenes fölött halad, hiszen körívet ír le az AB-re merőleges síkban, és ennek az egész síknak az alapsíkon levő vetülete a berajzolt D_1D' egyenes. Ugyanígy ACD_2-t AC körül fordítva D_2 a D_2D' egyenes fölött halad, és D_1 és D_2 a D' fölötti D pontban találkozik, hiszen $AD_1 = AD_2 = AD$.

Így az eredeti tetraéderben D' a D csúcsnak az ABC alapsíkon levő vetülete, és $DD' = m$ az erre az alapra merőleges magassága a testnek.

Ezek szerint, ha meghatározzuk D'-nek az A, B, C csúcsok valamelyikétől való távolságát, akkor m kiszámítható a $DD'A$, $DD'B$, ill. $DD'C$ háromszögből. Például az elsőből

$$m^2 = DA^2 - D'A^2, \tag{1}$$

mi ezt választjuk, ugyanis $D'A$ kiszámításában előnyösen használhatjuk ki azt az észrevételt, hogy a $DAB\sphericalangle = 90°$, hiszen $DB^2 = DA^2 + AB^2$.

Így D_1D' átmegy A-n, és ha még D_2D' és AC metszéspontja D_2', a C vetülete AB-re C', akkor $D'D_2'A$ és $AC'C$ hasonló derékszögű háromszögek, ebből

$$D'A = AC\frac{D_2'A}{C'C}. \tag{2}$$

Ehhez a $D_2D_2'A$ és $D_2D_2'C$ derékszögű háromszögekből, majd mindjárt behelyettesítve számadatainkat

$$D_2'D_2^2 = D_2A^2 - D_2'A^2 = D_2C^2 - D_2'C^2 = D_2C^2 - (AC - D_2'A)^2,$$

$$D_2'A = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC} = \frac{16}{7}.$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel a $CC'B$ és $CC'A$ derékszögű háromszögekből

$$C'C^2 = BC^2 - C'B^2 = AC^2 - (BC' - AB)^2,$$

$$BC' = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2AB} = 9, \qquad \text{így} \qquad CC' = \sqrt{40},$$

ennélfogva (2), majd (1) alapján

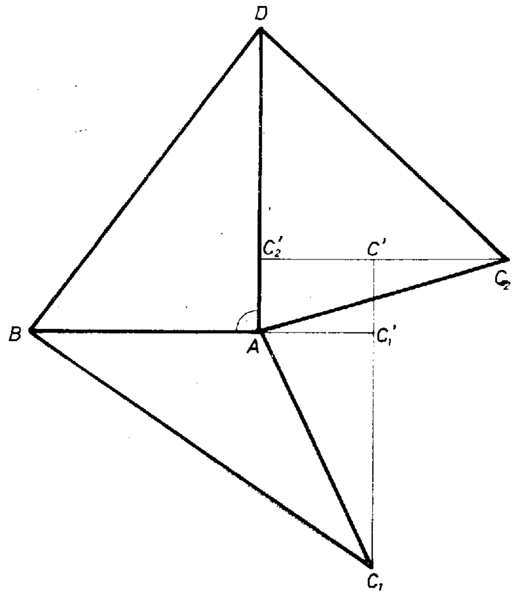
$$D'A = \frac{8}{\sqrt{10}}, \quad m^2 = 64 - \frac{64}{10} = \frac{9\cdot 64}{10}, \quad m = \frac{24}{\sqrt{10}}.$$

$C'C$ ismeretében kiszámítható az ABC alapháromszög területe is, így pedig a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{m}{3}\cdot\frac{AB\cdot C'C}{2} = 48 \text{ térfogategység},$$

(azaz 48 db egységnyi élű kocka térfogata).

Megjegyzések. 1. Az ABD háromszöglap derékszögét kihasználhatjuk úgy is, hogy ennek a lapnak a síkjába fordítjuk bele az ABC, ADC lapokat (2. ábra).



2. ábra

A fentiek alapján $AC_1' = 3$ egység, hasonlóan $AC_2' = 2$, $C'A^2 = C_1'A^2 + C_2'A^2 = 13$ és $m_{ABD} = 6$ egység, az alap pedig 24 területegység.

2. A vizsgált tetraéder élrendszere szép példa ún. *racionális tetraéder*re. Olyan tetraédert értenek ezen, melyben mind a 6 él és a térfogat mértékszáma racionális (esetünkben egész). A mértékszámok egymásutánisága emlékeztet a 3, 4, 5 egységnyi oldalú derékszögű háromszögre (ún. egyiptomi háromszög). Megjegyezzük azonban, hogy itt az élek helyzeti elrendeződése is fontos, másképpen állítva szemben fekvő párokba e mértékszámokat, a térfogat másnak adódhat. Pl. a 6 és 8 hosszúságú élek szerepét fölcserélve az 1. megjegyzésben kapott 6-os magasság helyett 6,97 adódik, az alapterület viszont változatlan.