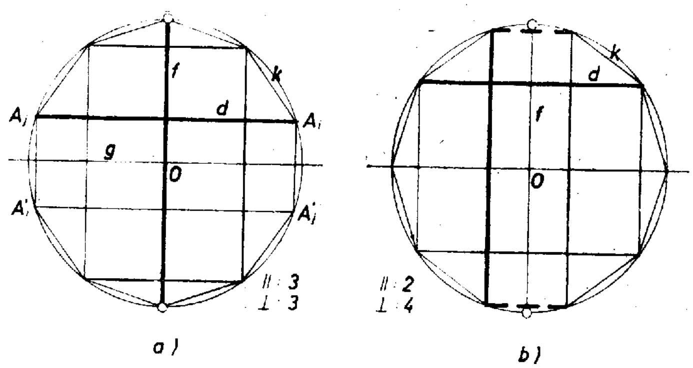
1. Tekintsük az $A_0A_1\dots A_9 = S_{10}$ szabályos tízszög bármelyik $A_iA_j = d(j > i)$ átlóját. Ennek f felező merőlegese átmegy az S_{10} köré írt k kör O középpontján, így az f-re való tükrözés önmagába viszi át k-t, azt értve ezen, hogy k pontjait páronként egymásba viszi át, k és f közös pontjai pedig helyben maradnak; a párokat összekötő szakaszok merőlegesek f-re. Ilyen pár A_i, A_j is, ezért a tükrözés S_{10}-et is önmagába viszi át, és S_{10}-nek további 8 csúcsa is legalább 3 ilyen párba kapcsolódik, közülük legfeljebb 2 pár alkotja S_{10}-nek egy-egy oldalát, így mindenesetre marad S_{10}-nek A_iA_j-vel párhuzamosan legalább 1 (szoros értelemben vett) átlója, amint a feladat állítja.

Amennyiben k és f közös pontjai maguk is csúcsai S_{10}-nek (1a. ábra), akkor a köztük levő szakasz mindjárt egy, a d-re merőleges átló; ha pedig f nem átló (1b. ábra), akkor f oldalfelező merőlegese S_{10}-nek (mert másféle szimmetriatengelye nincs a tízszögnek), van tehát S_{10}-nek két oldala, mely f-re merőleges. Ezek végpontjai téglalapot határoznak meg – hiszen az O körüli 180°-os elfordítás is önmagába viszi át a tízszöget – és a téglalap további két oldala a d-re merőleges átló. Ezzel az állításokat bebizonyítottuk.

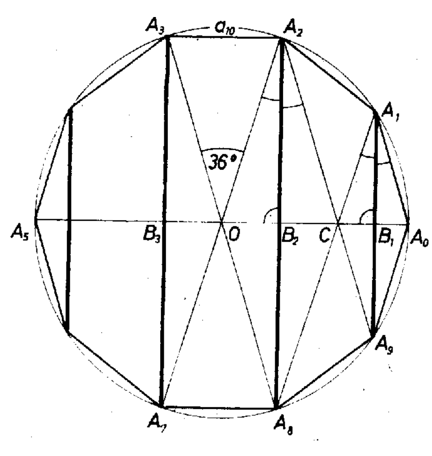


1. ábra

2. Az előbbi meggondolásból adódik, hogy f akkor és csak akkor átlója a tízszögnek, ha a d-nek egyik partján levő tízszögcsúcsok k száma páratlan (és ekkor a másik partján levő csúcsok $8 - k$ száma is páratlan, (1a. ábra). Ilyenkor az f-en kívül álló 8 csúcs 4 db d-irányú átlót alkot, tehát a d-vel párhuzamos, tőle különböző átlók száma 3. A d-re merőleges átlók g közös felező merőlegese viszont oldalfelező (párhuzamos d-vel), erre vonatkozóan a 10 csúcs 5 párt alkot, közülük 2 pár a tízszög egy-egy oldala, így páratlan k szám esetén a d-re merőleges átlók száma ugyancsak 3.

Hasonlóan f akkor és csak akkor oldalfelező, ha k páros, ekkor d-vel párhuzamosan 2 átló halad, rá merőlegesen pedig 4 (1b. ábra).

3. A 2 egységnyi A_0A_5 átmérőt a rá merőlegesen álló 4 átló 5 részre osztja (2. ábra), közülük kettő-kettő a szimmetria folytán egyenlő egymással, a középső pedig S_{10}-nek vele párhuzamos $A_2A_3 = a_{10}$ oldalával egyenlő, ami a kitűzéskor idézett 1766. feladat[1] szerint



2. ábra

$$B_2B_3 = 2\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(= 0{,}618);$$

hiszen OA_2A_3 egyenlő szárú háromszög, és a szárai közti szög $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

[1]K. M. L. 43 (1971) 15. oldal.

Az A_0A_5 tengelyre tükrös A_2A_7, A_8A_3, valamint A_1A_8, A_9A_2 átlópárok a tengelyen metszik egymást, a kerületi szögek tétele alapján a jelölt szögek egyenlők, így az OCA_2 és CA_0A_1 háromszögek egyenlő szárúak, ezért

$$OC = 2OB_2 = B_3B_2 = a_{10},$$
$$B_1A_0 = \frac{CA_0}{2} = \frac{1-OC}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}(= 0{,}382),$$

végül

$$B_2B_1 = B_2C + CB_1 = \frac{OC}{2} + \frac{CA_0}{2} = \frac{OA_0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzések. 1. A d-vel párhuzamos átló létezésének bizonyítására egyszerű ötletnek ígérkezik ez: tükrözzük a $d = A_iA_j$ átlót O-ra, ekkor az $A_j'A_i'$ tükörkép is átló és párhuzamos d-vel. Így azonban külön bizonyításra van szükség arra az esetre, ha d éppen átmérő, hiszen ekkor a tükörkép azonos d-vel.

Az A_iA_j-re merőleges átlóként pedig A_iA_j'-re kézenfekvő rámutatni. De itt is marad pótolni való: A_j' azonos A_i-vel, ha d átmérő; lehet továbbá A_iA_j' oldala is a tízszögnek.

2. Az állítás és fenti bizonyításunk érvényes minden $4n$ és $(4n+2)$ oldalú szabályos sokszögre, ha $n \geq 2$. (A bizonyítás a $4n$ oldalszám esetén kissé módosul.)