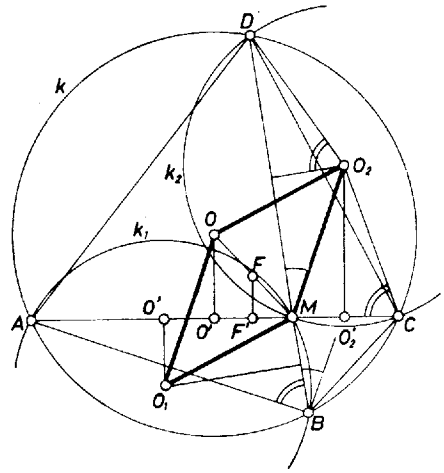
**I. megoldás.** Az állítás egyértelmű azzal, hogy $O_1$ és $O_2$ egymás tükörképei az $OM$ szakasz $F$ felezőpontjára nézve. Ezt fogjuk bizonyítani azzal, hogy az $O_1$-et, $O_2$-t meghatározó oldalfelező merőlegesek közül kettő-kettő az $F$-re tükrös párt alkot (1. ábra, az $A$-hoz közelebbi $O'$ helyesen $O_1'$).




*1. ábra*

$O_1$-et az $MA$, $MB$ szakaszpár, $O_2$-t pedig az $MC$, $MD$ szakaszpár felező merőlegesei metszéspontjának tekintjük, így állításunk nyilvánvalóan az $MA$, $MC$ és az $MB$, $MD$ párok felező merőlegeseire vonatkozik. Az $O$, $O_1$, $O_2$ és $F$ pont $AC$-n levő vetületét rendre $O'$-vel, $O_1'$-vel, $O_2'$-vel, $F'$-vel jelölve elég azt belátnunk, hogy $O_1'$-t $F'$-re tükrözve $O_2'$-t kapjuk. Valóban, ezek a pontok mind az $AC$ szakaszon vannak, és $A$-tól mért távolságuk rendre

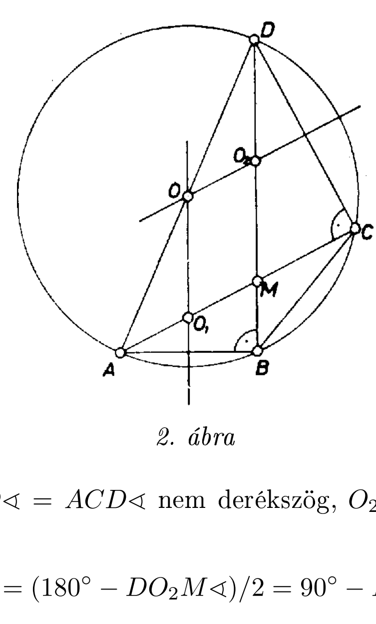
$$\begin{aligned} AO_1' &= \frac{1}{2}\,AM, \\ AF' &= \frac{1}{2}\,(AO' + AM) = \frac{1}{4}\,AC + \frac{1}{2}\,AM, \\ AO_2' &= \frac{1}{2}\,(AM + AC), \end{aligned}$$

amiből $AF' = \frac{1}{2}\,(AO_1' + AO_2')$ következik.

Ugyanígy bizonyítható, hogy $MB$ és $MD$ felező merőlegese tükrös az $F$ pontra, tehát a feladat állítása az előrebocsátottak szerint helyes.

Egyszerűsítéssel *Kovács Zoltán* (Győr, Révai M. Gimn., II. o. t.) dolgozatából.

**II. megoldás.** Az $OO_1MO_2$ négyszög $OO_1$ oldala szerkesztésnél fogva az $AB$ szakasz felező merőlegese. Erre tekintettel azt fogjuk bizonyítani, hogy az $O_2M$ egyenes is merőleges $AB$-re, hiszen így párhuzamos $OO_1$-gyel. Ez az eredeti ábrából minden hozzáadás nélkül adódik akkor, ha $AD$ az $O$ középpontú körnek átmérője (2. ábra), hiszen ekkor $MD \perp AB$, $O_2$ pedig az $MD$ szakasz felezőpontja, mert $MDC$ derékszögű háromszög, és $MD$ az átfogója.




*2. ábra*

Ha $AD$ nem átmérő, akkor az $MCD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$ nem derékszög, $O_2$ nincs az $MD$-n, az $O_2MD$ egyenlő szárú háromszögből

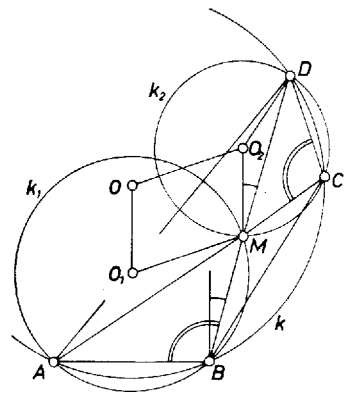
(1) $$DMO_2\sphericalangle = (180^\circ - DO_2M\sphericalangle)/2 = 90^\circ - DO_2M\sphericalangle/2.$$

A kivonandó mindenesetre hegyesszög és egyenlő a $DCM\equiv DCA$, $DBA$ szögekkel, hacsak ezek hegyesszögek (1. ábra), tehát az utolsó alak a $DBA$ szög pótszöge, $MO_2$ párhuzamos az $AB$-re $B$-ben állított merőlegessel, $MO_2$ merőleges $AB$-re, mert $MCD\sphericalangle < 90^\circ$ alapján $O_2$ azon a partján van a $BD$ egyenesnek, mint $C$, az $A$ pont pedig a másik partján.

Ha pedig a $DCM\equiv DCA$, $DBA$ szögek tompaszögek, akkor kiegészítő szögük egyenlő (1) kivonandójával, vagyis

$$DMO_2\sphericalangle = 90^\circ - (180^\circ - DBA\sphericalangle) = DBA\sphericalangle - 90^\circ$$

és most az $A$ és $O_2$ pontok a $BD$ egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, tehát $MO_2$ ekkor is párhuzamos a $B$-ben $AB$-re állított merőlegessel (3. ábra).



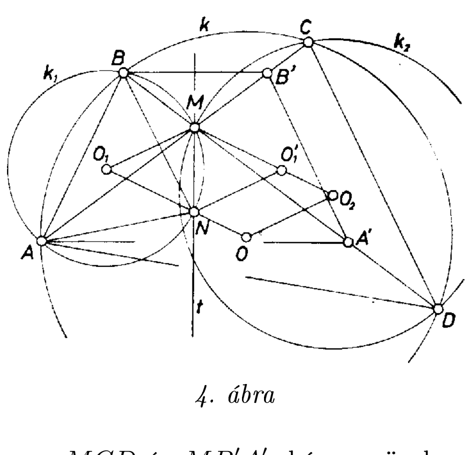

*3. ábra*

Írjunk most ábráink $A$, $B$, $C$, $D$ betűje helyére rendre $C$, $D$, $A$, $B$ betűt, ekkor $O_1$ helyére $O_2$-t és $O_2$ helyére $O_1$-et kell írnunk és fenti bizonyításunk szerint az új $OO_1$ és új $O_2M$ párhuzamosak, vagyis az eredeti $OO_2$ és $O_1M$ párhuzamosak. Így pedig $OO_1MO_2$ valóban paralelogramma.

A paralelogramma $OO_2$ oldalegyenese a $CD$ oldal felező merőlegese.
Ha az $ABCD$ négyszögben $AB$ párhuzamos $CD$-vel, akkor felező merőlegesük azonos és a vizsgált paralelogramma elfajul.

*Megjegyzés.* Megoldásunkból kiolvasható a következő, önmagában is érdekes állítás bizonyítása. Ha egy háromszögben az egyik csúcsot összekötjük a körülírt kör középpontjával, és a szemközti oldalt tükrözzük a hozzátartozó szögfelezőre, merőleges egyeneseket kapunk.

**III. megoldás.** Jelöljük az $ABM$ háromszög köré írt körnek, $k_1$-nek és a háromszög $M$-beli külső szögfelezőjének, $t$-nek a „másik" metszéspontját $N$-nel (vagyis $N$ a $t$ és $k_1$ $M$-től különböző metszéspontja minden olyan helyzetben, ha $t$ metszi $k_1$-et, különben pedig $N$ azonos $M$-mel). A kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján $N$ felezi a $k_1$-nek az $AB$ ívét, és így $N$ rajta van az $AB$ szakasz felező merőlegesén, $AN = BN$. Tükrözzük az $A$, $B$, $O_1$ pontokat $t$-re, és jelöljük a kapott pontokat $A'$-vel, $B'$-vel és $O_1'$-vel. A fentiek szerint $O_1MO_1'N$ rombusz, és $N$ az $ABB'A'$ trapéz köré írható kör középpontja (4. ábra).




*4. ábra*

Mivel $ABCD$ konvex húrnégyszög, az $MCD$ és $MB'A'$, háromszögek megegyező körüljárásúak, és centrálisan hasonlóak. Emiatt $O_2$-t a $CD$ szakasz $NO_1'$-vel párhuzamos felező merőlegese metszi ki $MO_1'$-ből és ugyanez a felező merőleges metszi ki $O_1N$-ből $O$-t. (Szemléletesen mondva: az $M$-centrumú nagyítás – vagy kicsinyítés – közben az $MO_1'$, $NO_1$ „síneken" futnak az $O_2$, $O$ pontok.) Tehát $O_1MO_2O$ paralelogramma.

Egyszerűsítéssel *Kollár János* (Bpest., Piarista Gimn., II. o. t.) dolgozatából.