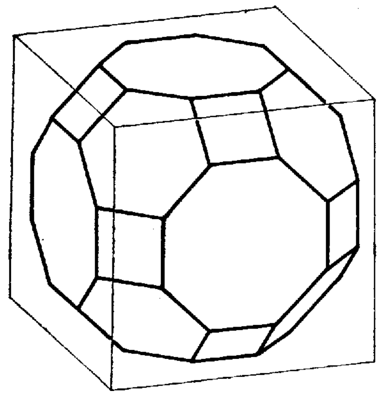
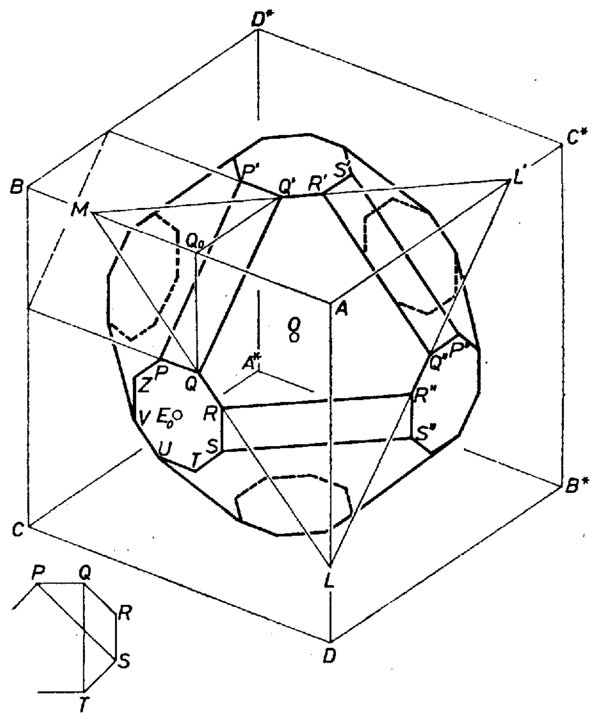


1. ábra

1. Legyen a kocka előlapja $ABCD = E$, testátlói AA^*, BB^*, CC^*, DD^*. Vegyünk fel E belsejében egy $PQRSTUVZ = N$ szabályos nyolcszöget úgy, hogy középpontja essék egybe E-nek E_0 középpontjával, PQ oldala párhuzamos és egyirányú legyen BA-val és közelebb legyen hozzá, mint a TU oldal. Így N-nek mindegyik oldala párhuzamos E-nek valamelyik oldalával vagy átlójával (2. ábra).



2. ábra

Tükrözzük alakzatunkat az ABA^*B^* és az ADA^*D^* átlós síkokra. A kocka mindkét esetben önmagába megy át, N pedig az $ABD^*C^* = F$ fedőlap, illetve $ADB^*C^* = J$ jobb oldallapban fekvő, vele egybevágó $N' = P'Q' \dots Z'$, illetve $N'' = P''Q'' \dots Z''$ szabályos nyolcszögbe, és ezek öröklik az E és N közti kapcsolatokat, oldalaik párhuzamosak F, illetve J valamelyik oldalával vagy átlójával és középpontjuk közös az illető lap középpontjával.

Vegyük ezután az N-ből, N'-ből és N''-ből álló alakzatnak a kocka O középpontjára való (centrális) tükörképét, ezek rendre a kocka hátlapjának, alapjának, bal oldallapjának belsejében keletkeznek. Továbbá a kocka szimmetriái alapján N-nek és az 5 képnek a csúcsai rajta vannak az O körüli OQ sugarú gömbön, hiszen ez a kocka mindegyik lapját olyan körben metszi, melynek középpontja az illető lap középpontja, sugara pedig egyenlő E_0Q hosszúságával, tehát köréje van írva az illető nyolcszögnek.

Eddig nem használtuk ki N oldalának hosszúságát, tehát az N-ből leszármaztatott pontokkal mint csúcsokkal meghatározott test köré mindig gömb írható, tekintet nélkül további lapjainak szabályos voltára.

A tükrözés alapján PQ egyenlő és párhuzamos $P'Q'$-vel, mert PQ párhuzamos az itt használt tükörsík BA egyenesével, így P, Q, Q', P' egy síkban vannak, a lap a kockából egyetlen síkmetszéssel kialakítható. Továbbá QQ' merőleges a tükörsíkra és mivel DC^* is merőleges rá, és az AB élre is, azért QQ' merőleges PQ-ra, $PQQ'P'$ téglalap.

Ugyanezt a végeredményt kapjuk a kocka további 11 éle mentén is, ha a benne csatlakozó lapok két szabályos nyolcszögének az élhez közelebbi, vele párhuzamos oldalait állítjuk párba (pl. $R'S'$ párhuzamos AC^*-gal, mert – amint RS – merőleges AB-re, és hasonlóan $Q''P'' \parallel AC^*$, így $R'S' \parallel Q''P''$, és egyenlők N oldalával.

Egy síkban vannak a Q, R, Q', R', Q'', R'' pontok is. Ugyanis a QR egyenesnek AB-vel, AD-vel való metszéspontját M-mel, illetve L-lel jelölve $AM = AL$, mert QR párhuzamos a BD átlóval, így az első két tükrözésben L' és M'' egybeesik, és Q', R' az ML'-n vannak, R'', Q'' pedig az LL' egyenesen, a 6 csúcs az MLL' síkon. Ez a 6 csúcs van A-hoz legközelebb az N-ből származtatott alakzat csúcsai közül; és további 6–6 ilyen csúcs található a kocka további 7 csúcsának a környezetében is, az ezek által keletkezett hatszöglapok is egyetlen síkmetszéssel származtathatók a kockából. (A $PQQ'P'$ típusú négyszögeket és az utóbbi hatszögeket előállító metsző síkok egymást is metszik.)

A $QRR''Q''R'Q'$ hatszög méreteiről is tehetünk megállapításokat. Szemben levő oldalai párhuzamosak, pl. $QQ' \parallel R''Q''$, mert MLL' egyenlő oldalú háromszög, és $MQ' = MQ$, ugyanezért a hatszög mindegyik szöge $120°$. Továbbá a hatszög minden második oldala N oldalával egyenlő, és egyenlők az ezek közt levők is, pl. $QQ' = RR''$, mert az eddigiek alapján $RL = MQ$, és MQQ' és LRR'' egybevágó egyenlő oldalú háromszögek.

Ezek szerint a $PQ = QQ'$ egyenlőség biztosításával a mondott 12 téglalap és a 8 hatszög egy csapásra négyzetté, illetve szabályos hat hatszöggé specializálódik. Legyen a kocka éle $AB = a$ és N oldala $PQ = b$, ekkor erre merőleges átlója a vele egyenlő PS által létrehozott részekből

$$QT = b\left(1 + \sqrt{2}\right),$$

így Q-nak az AB-n levő Q_0 vetületétől való távolsága

$$QQ_0 = \frac{AD - QT}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b\left(1+\sqrt{2}\right)}{2},$$

a $QQ'Q_0$ egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójaként

$$QQ' = \sqrt{2}QQ_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}},$$

és így a mondott $PQ = QQ'$ követelményből

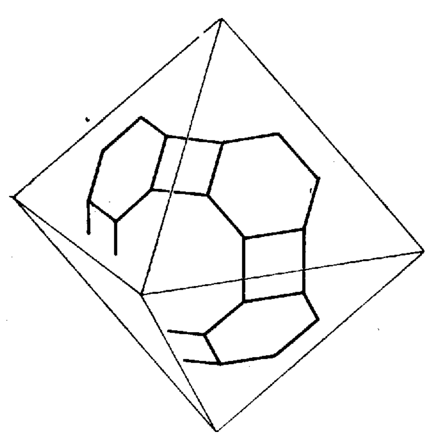
$$b = \frac{a}{7}\left(2\sqrt{2} - 1\right) = a \cdot 0{,}261.$$

Ezek alapján a $PQQ'P'$ lap a BC és BD^* élekből, $QQ_0 = \dfrac{a}{14}\left(4 - \sqrt{2}\right) = a \cdot 0{,}184$ darabot metsz le, és párhuzamos BA-val; a $QRR''Q''R'Q'$ szabályos hatszöglapot lemetsző sík pedig az A-ból induló élekből

$$AM = \frac{LM}{\sqrt{2}} = \frac{2MQ + b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot QQ' + \frac{b}{\sqrt{2}} = b\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3a}{14}\left(4 - \sqrt{2}\right) =$$
$$= 3 \cdot QQ_0 = a \cdot 0{,}552$$

darabot metsz le.

2. Hasonlóan látható be, hogy a test szabályos oktaéderből is leszármaztatható, ha kiindulunk az egyik lapjára rajzolt, vele koncentrikus olyan szabályos hatszögből, amelynek oldalai párhuzamosak a vett oktaéderlap éleivel, majd ezt tükrözzük a vele szomszédos lapokra a lapszög felezősíkján át, majd a test középpontjára, végül úgy választjuk a hatszög oldalát – a test leendő élét –, hogy két hatszög egymáshoz legközelebbi oldalai egy négyzet két szemben fekvő oldalát adják (3. ábra).

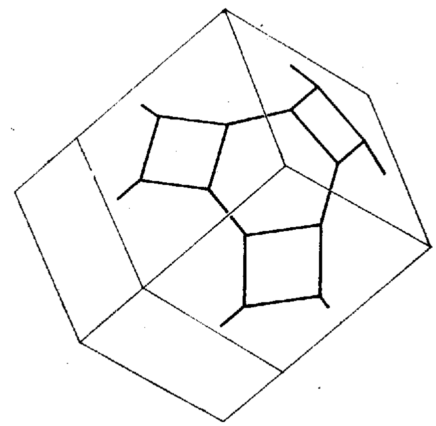


3. ábra

A szükséges számítások azonban a fentieknél bonyolultabbak, kevesebb a számítást könnyítő derékszög.

Beláthatjuk ezt abból is, hogy a 8 db szabályos hatszöglapot kellően meghosszabbítva szabályos oktaédert kapunk. Ebből könnyebb az új test éle és az oktaéder éle közti kapcsolat meghatározása.

Megjegyzések. 1. Hasonlóan a test négyzetlapjait kellően meghosszabbítva ún. rombdodekaédert kapunk,[1] ebből is előállítható a test alkalmas síkmetszésekkel (4. ábra).



4. ábra

2. A vizsgált test egyike az ún. arkhimédészi félszabályos testeknek (minden lapjuk szabályos sokszög de nem mind egybevágók – és minden csúcsának a „környezete” mint triéder egybevágó egymással).

[1]Lásd: *Csákány Béla:* A méhek lépsejtjeiről, matematikus szemmel. K. M. L. 43 (1971) 109–117. old., élesebben 113–114. old.