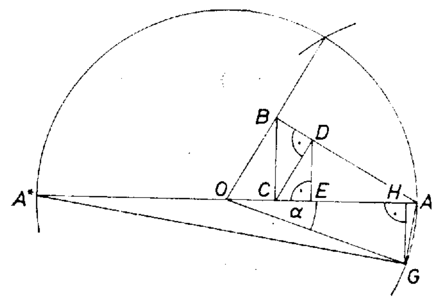

a) Az OAB háromszögben B-nél derékszög van, ezért az OBC, BCD, CDE háromszögek mindegyike fele egy egyenlő oldalú háromszögnek. Így

$$DE = \frac{\sqrt{3}}{2}CD = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 BC = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 OB = \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot OA.$$

Eszerint az A körüli, DE sugarú körív és k metszéspontját G-vel jelölve az $AOG\sphericalangle = \alpha$ szögre

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AG/2}{OA} = \frac{DE}{2\,OA} = \frac{3\sqrt{3}}{32} = 0{,}16238$$

(5 tizedesre, hiszen $\sqrt{3}$ tetszőleges pontossággal megközelíthető), és így $\alpha/2 = 9°\,20{,}6'$. A húr 19-szeri fölmérése után a kezdő sugár ennek 38-szorosával, $355°\,3'$-cel fordul el, így a köztük levő hegyesszög $\beta = 4°57'$.

b) Az $\alpha/2$ szögnek $9°\,20'$ fölötti töredékét a

$$\delta = \frac{0{,}16238 - \sin 9°\,20'}{\sin 9°\,30' - \sin 9°\,20'}$$

hányadosból számítottuk. A táblázat $\sin 9°20' = 0{,}1622$ és $\sin 9°30' = 0{,}1650$ adatai azonban 4 tizedesre kerekítettek, vagyis 5 tizedesre $0{,}16215 \leqq \sin 9°20' \leqq 0{,}16225$ ill. $0{,}16495 \leqq \sin 9°30' \leqq 0{,}16505$.

Ha csak ezeket tekintjük, akkor δ számlálója úgy adódnék legnagyobbnak, ha $\sin 9°20' = 0{,}16215$ lenne, így pedig a nevező $\sin 9°30' = 0{,}16495$ esetén lenne a legkisebb, így

$$\delta < \frac{0{,}00023}{0{,}00280} < 0{,}83'.$$

δ számlálója $\sin 9°20' = 0{,}16225$ mellett adódnék legkisebbnek és ekkor a nevező $\sin 9°30' = 0{,}16505$ mellett lenne a legnagyobb, így

$$\delta > \frac{0{,}00013}{0{,}00280} > 0{,}46'.$$

Az $\alpha/2$ eredményre elfogadott $0{,}6'$-nyi töredék maximális hibája eszerint nem haladhatja meg a $0{,}83 - 0{,}6 = 0{,}23'$-et. A fenti β maximális hibája pedig nem haladhatja meg ennek 38-szorosát, még kevésbé a $9'$-et.

(Más kérdés volna természetesen az, hogy $\alpha = 18°41{,}2'$ mennyire pontos a valódi szabályos 19-szög egy oldalához tartozó középponti szöghöz viszonyítva.)

Megjegyzések. 1. A hiba becslésénél tekintetbe vehetnők a táblázatnak a felhasználtakkal szomszédos adatait: $\sin 9°10' = 0{,}1593$, $\sin 9°40' = 0{,}1679$, mindkettőben $29\cdot 10^{-4}$ a különbség a felhasznált adathoz képest, míg emezek közt $28\cdot 10^{-4}$, tehát $9°10'$ és $9°40'$ közt a $10'$-re eső átlagos különbség $28{,}7\cdot 10^{-4}$. Ebből annyit lehet látni, hogy 0,1622 és 0,1650 kerekítése csökkentette a köztük (pontosabb táblázat szerint) mutatkozó különbséget, a két szomszédos különbség pedig növekedett a kerekítés folytán – más szóval: hogy 0,1622 és 0,1650 kerekítése *egymás felé* sikerült. Ezzel azonban *nem lehet* pontosabbá tenni a táblázat adatait. (6 tizedesjegyre $\sin 9°20' = 0{,}162\,178$ és $\sin 9°30' = 0{,}165\,048$, az utóbbinál majdnem a lehetséges legnagyobb lekerekítés történt.)

2. Többeket $\cos\alpha$ felhasználására csábított az, hogy ez az érték racionális. G-nek OA-n levő vetületét H-val, k-nak A-val átellenes pontját A^*-gal jelölve az AA^*G derékszögű háromszögből

$$AH = \frac{AG^2}{AA^*} = \frac{DE^2}{2\cdot OA} = \frac{27}{512}, \quad \text{és így}$$
$$\cos\alpha = \frac{OH}{OG} = \frac{485}{512} = 0{,}94727.$$

Ez a táblázat $\cos 18°40' = 0{,}9474$ és $\cos 18°30' = 0{,}9465$ adatai közé esik. Minthogy azonban ezek különbsége csupán $9\cdot 10^{-4}$ – a cosinusfüggvény változása e hely környezetében jóval lassabb, mint a sinusfüggvény változása $9°20'$ környezetében –, azért ebből számítva β-t és hibakorlátját, az utóbbira a fentinél nagyobb érték adódnék.

Minden táblázatnak azok a részei nyújtanak lehetőséget kisebb hibakorlátú visszakeresésre, ahol a szomszédos adatok közti különbség abszolút értéke nagyobb, szemléletesen: amelyeknek megfelelő görbe ív meredekebb.