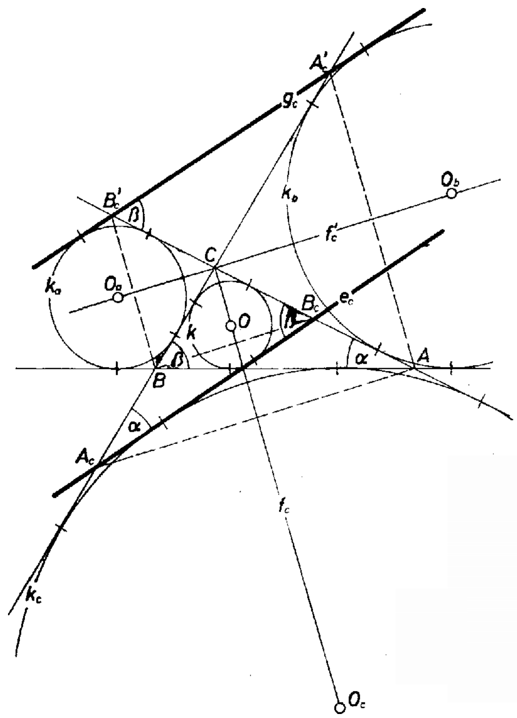
1. Legyen az ABC háromszögbe beírt k kör középpontja O, a BC oldalhoz hozzáírt (vagyis a BC oldalszakaszt kívülről, valamint az AB, AC oldalak meghosszabbításait érintő) k_a kör középpontja O_a, és hasonlóan a CA, ill. AB oldalhoz hozzáírt k_b, ill. k_c kör középpontja O_b ill. O_c. Két egymáson kívül álló körnek – ilyen a k, k_a, k_b k_c-ből vett bármelyik pár is – négy közös érintője van, két külső és két belső, és a párok egymás tükörképei a két kör egyetlen közös szimmetriatengelyére, a középpontjaikat összekötő egyenesre, az ún. centrálisukra. Más szóval: a centrális felezi mind a közös külső, mind a közös belső érintők közti szöget.

Bármelyik 2 körünknek 3 közös érintője a háromszög 3 oldalegyenese, így minden pár esetében egy közös érintőt kell megrajzolnunk. Vegyük pl. a k, k_c körpárt, ezekre nézve a CA, CB oldalegyenesek a közös külső érintők, az OO_c, centrális a BCA szög f_c szögfelezője, tehát a negyedik közös érintő az AB egyenesnek f_c-re való $A_cB_c = e_c$ tükörképe, ahol A_c, a CB-n, B_c a CA egyenesen van rajta (1. ábra).



1. ábra

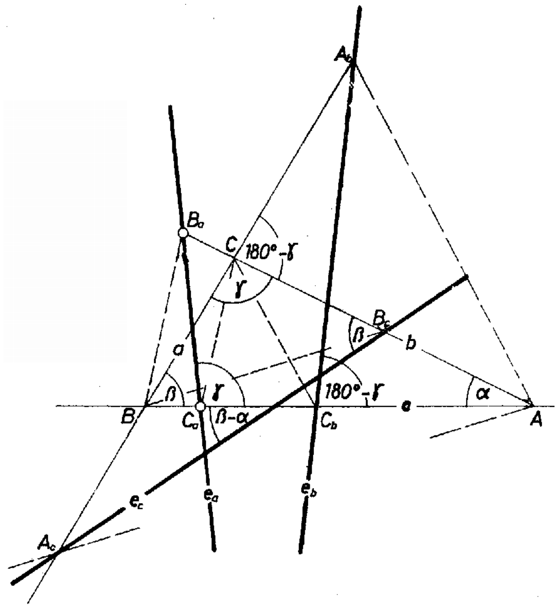
Hasonlóan a k_a, k_b körpár esetében CA és CB a közös belső érintők, az O_aO_b centrális a háromszög C csúcsánál levő külső szögek f_c' felezője, így a negyedik közös érintő megint az AB egyenes tükörképe, ezúttal f_c'-re, az $A_c'B_c' = g_c$ egyenes, ahol A_c' a CB egyenesen, B_c' a CA egyenesen van.

Azt állítjuk, hogy a C csúcs körüli 180°-os elfordítással (vagyis a C pontra való tükrözéssel) e_c és g_c egymásba mennek át, tehát párhuzamosak egymással. Valóban, A_c és A_c' a CB egyenesen vannak és a két tükrözés folytán $A_c'C = AC = A_cC$, és ugyanígy $B_c'C = B_cC$, és ez igazolja állításunkat.

Ugyanígy párhuzamosak a 4 körből a k, k_a és k_b, k_c párokat alakítva az e_a, ill. g_a negyedik érintők is, végül a k, k_b és k_a, k_c körpárok e_b, g_b érintői. (Többféleképpen nem kapunk negyedik érintőt, hiszen k párjaként sorra vettük a többi 3 kört, és mindig vettük a 2 kimaradt kört is.)

2. Mivel a feladat trapézok, paralelogrammák oldalegyeneseit keresi a rajzolt 6 egyenes közt, meg kell vizsgálnunk, léphet-e fel további párhuzamosság az eddigi 3 pár egy-egy tagja, pl. az e_a, e_b, e_c egyenesek közt.

Válasszuk a háromszög betűzését úgy, hogy a szokásos jelölésekkel a szögekre álljon $\alpha < \beta < \gamma$, vagyis $\beta < 90°$ (2. ábra).

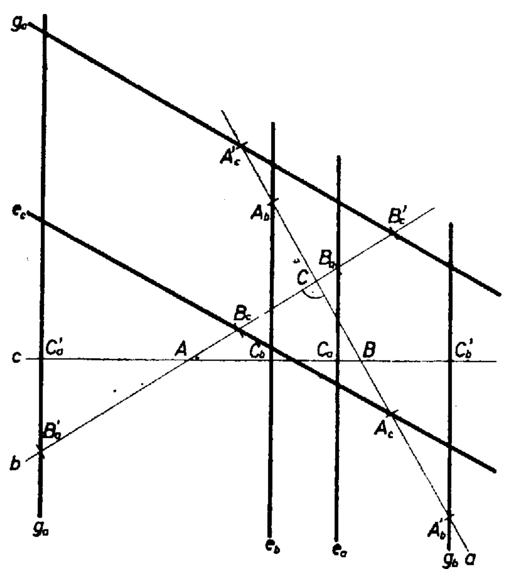


2. ábra

Ekkor a tükrözés és a külső szögek tétele alapján az e_a, e_b, e_c egyenes a BA irányból rendre

$$\gamma, \qquad 180^\circ - \gamma, \qquad \beta - \alpha$$

irányú elfordulással áll elő. Eszerint $e_a \parallel e_b$, ha $\gamma = 90^\circ$; viszont $e_a \parallel e_c$ nem lehetséges, mert $\beta - \alpha = \gamma = 180^\circ - \beta - \alpha$-ból $\beta = 90^\circ$ következik; végül lehetetlen $e_b \parallel e_c$ is, mert ez $\beta - \alpha = 180^\circ - \gamma = \beta + \alpha$-ra, $\alpha = 0^\circ$-ra vezet. Eszerint derékszögű háromszög esetében 6 egyenesünk közül 4 párhuzamos, és ezek különbözők (hiszen pl. C_a és C_b, egybeesése azt jelentené, hogy $CA + CB = BC$, ami lehetetlen, 3. ábra).



3. ábra

Ha pedig nincs a háromszögben derékszög, akkor a párhuzamos érintőpárok irányai különbözők.

3. A kérdésre visszatérve, ha az ABC háromszög nem derékszögű, a hat érintő egyenes közül bármely négyet kiválasztva, mindig van köztük két párhuzamos, de nincs kettőnél több. Így létrejön négyszög, és az mindenesetre trapéz. Hányféleképpen lehet a négy egyenest kiválasztani? Ahányféleképpen megmaradó két egyenest „mellőzhetjük”: $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (a szimmetria miatt osztunk 2-vel).

Tehát 15 trapéz jön létre. Ezek között lehetnek konvexek és hurkoltak, vagyis olyanok, amelyeknek szárai a két párhuzamos egyenes közt metszik egymást, esetleg elfajulók, továbbá paralelogrammák, ha mindkét pár oldaluk párhuzamos. Paralelogrammát akkor kapunk, ha a kiválasztott négy egyenes páronként párhuzamos, vagyis a három párból egy teljes párt hagyunk el. Ilyen a 15 lehetőség közül 3.

Ha a háromszög derékszögű, az átfogóra merőleges 4 érintő közül egyszerre csak 2-t választhatunk, ezért a más irányú két párhuzamosnak mindenesetre közte kell lennie a négyszög oldalegyeneseinek. 4 közül 2-t 6-féleképpen választhatunk (mint fönt a köröknél láttuk), itt tehát 6 kiválasztás lehetséges, és ezek mindig paralelogrammát adnak.

Megjegyzés. Nem említettük a megoldás során a feladatnak azt a megszorítását, hogy a háromszög oldalai közt nincs két egyenlő hosszú. Ennek ellenére kihasználtuk ezt abban, hogy e_c különböző az $AB = c$ oldalegyenestől, s i. t. Ugyanis e_c akkor és csak akkor azonos c-vel, ha az f_c szögfelező merőleges c-re, azaz ha $CA = CB$. Az ilyen esetek kizárásával elébe vágtunk az olyan helyzetek vizsgálatának, ahol 6-nál kevesebb lesz a megrajzolt érintő egyenesek száma.