

I. Az adott kifejezés könnyen átalakítható két, majd három, majd öt kifejezés szorzatává:

$$\begin{aligned} K &= x^4(x + 3y) - 5x^2y^2(x + 3y) + 4y^4(x + 3y) = \\ &= (x + 3y)\{(x^4 - 4x^2y^2) - (x^2y^2 - 4y^4)\} = \\ &= (x + 3y)(x^2 - 4y^2)(x^2 - y^2) = \\ &= (x + 3y)(x + 2y)(x + y)(x - y)(x - 2y), \end{aligned}$$

ahol – ha  $x$  és  $y$  egészek – mind az öt tényező értéke egész szám.

Ha  $y = 0$ , akkor  $K = x^5$ , és ez nyilván nem lehet 33-mal egyenlő. Ha pedig  $y \neq 0$ , akkor  $K$  öt különböző szám szorzatára bontható, a 33 viszont legfőljebb *négy különböző* egész szám szorzataként írható, ti. úgy, hogy tényezőnek vesszük (+1)-et és (-1)-et, és a 3 és 11 egyikének a negatívját vesszük. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

II. Nem volt lényeges a 3-as és 11-es törzstényező értéke. Könnyű látni, hogy az állítás igaz minden törzsszámra, a törzsszámok (-1)-szeresére, minden  $\pm pq$  számra, ahol  $p$  és  $q$  egymástól különböző törzsszámok. (Sőt még a  $\pm p^2q$  alakú számokra is igaz, ahol  $p \neq 2$  és  $q \neq 2$ .)