I. megoldás. 1. A föltevés szerint $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$. Jelöljük a közös értékük tovább nem egyszerűsíthető alakját $\frac{u}{v}$-vel, vagyis u és v egymáshoz képest relatív prím természetes számok (nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk). Ekkor van olyan j és k természetes szám (amivel egyszerűsítettünk), hogy

$$a=ju, \quad c=jv, \quad d=ku, \quad b=kv.$$

Eszerint pedig

$$a+b+c+d=j(u+v)+k(v+u)=(j+k)(u+v),$$

összetett szám, hiszen mindkét tényező értéke legalább 2. Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha $ab=cd$, akkor $a+b+c+d$ összetett szám.

Ebből következik, hogy ha x, y, u, v olyan természetes számok, amelyekre $xy=uv$, és n tetszőleges természetes szám, akkor $(x^n+y^n+u^n+v^n)$ összetett szám (ami $n=2$ mellett feladatunk még be nem bizonyított állítását jelenti). Valóban, ha $xy=uv$, akkor $x^ny^n=u^nv^n$, tehát az $a=x^n$, $b=y^n$, $c=u^n$, $d=v^n$ számokra alkalmazható az előző állítás, és ez éppen azt jelenti, hogy $(x^n+y^n+u^n+v^n)$ összetett szám.

Pálfalvi György (Győr, Révai M. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás a feladat első állítására. Szorozzuk az $s=a+b+c+d$ számot a-val, és helyettesítsük a szorzat második tagját a föltevés alapján:

$$as=a^2+cd+ac+ad=a(a+c)+d(c+a)=(a+c)(a+d).$$

Ha s törzsszám volna, akkor a jobb oldalon legalább az egyik tényezőnek osztója volna.[1] Ez azonban lehetetlen, mert mindkét tényező kisebb, mint s.

[1] *Ha egy szorzat osztható egy törzsszámmal, akkor a szorzatnak legalább egyik tényezője osztható ezzel a törzsszámmal.* E tétel bizonyítása – valamint a közben felhasznált tételeké – megtalálható pl. a következő Középiskolai Szakköri Füzetben: *Faragó László:* A számelmélet elemei. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954. 22. oldal.