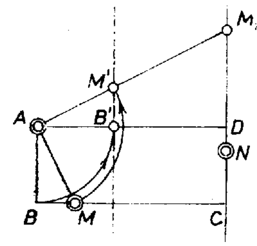
I. Megoldás. Tegyük fel, hogy a keresett $ABCD$ négyszög pozitív körüljárású (ez azt jelenti, hogy ha a csúcsokat az A, B, C, D sorrendben járjuk végig, eközben a téglalap középpontját az óramutató járásával ellentétes irányban kerüljük meg). Forgassuk el az A körül a B csúcsot pozitív irányban $90°$-kal, az AD szakasz B' pontját kapjuk, melyre $AB' = AB$. Ha A körül az egész BC egyenest elforgatjuk pozitív irányban $90°$-kal, az AD-re merőleges, B'-n átmenő egyenest kapjuk. Ezen az egyenesen lesz az M pont forgatottja is, az M' pont. Az A centrumú, $5 : 2$ arányú nagyítás $AB' : AD = AB : AD = 2 : 5$ miatt B'-t D-be viszi, tehát M'-höz a CD egyenes valamely M_1 pontját rendeli hozzá (1. ábra).



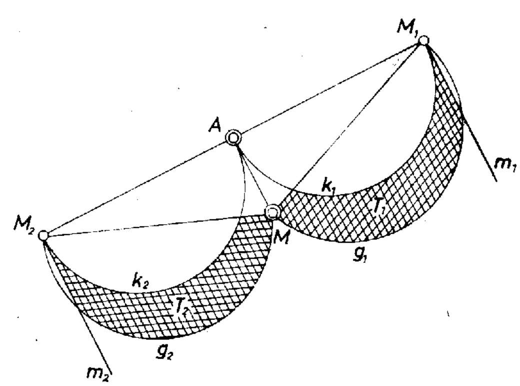
1. ábra

Az M' és M_1 pontokat adataink alapján könnyen megszerkeszthetjük: ha az AM-re merőleges, A-n átmenő egyenesre A-ból kiindulva alkalmas irányban felmérjük az AM szakasz felét kétszer, M'-t kapjuk (erre különben túl nagy szükségünk nincs), ha pedig ötször mérjük fel AM felét, akkor M_1 et kapjuk (jelöljük M_2-vel azt a pontot, amit az ellentétes irányú felmérésből kapunk). Ekkor A merőleges vetülete az M_1N egyenesen D, az M-en átmenő, AD-vel párhuzamos egyenesen pedig B, végül C-t B-nek M_1N-re való vetítésével kapjuk. (Ha M_1 helyett a közben megszerkesztett M_2-t használjuk, ugyanezzel az eljárással negatív körüljárású megoldást kapunk.) A kapott négyszög a szerkesztés szerint téglalap, és a BC oldal egyenese átmegy M-en, a CD oldal egyenese átmegy N-en. Ha a CD egyenest az A centrumból $2 : 5$ arányban kicsinyítjük, az M'-n átmenő egyenest kapjuk, ezt A körül negatív irányban $90°$-kal elforgatva M-en átmenő egyenest kapunk. Tehát B-t D-ből az A centrumú $2 : 5$ arányú kicsinyítéssel, majd egy ezt követő, ugyancsak A centrumú $(-90°)$-os forgatással kapjuk. Emiatt $ABCD$ pozitív körüljárású, és benne $AB : BC = 2 : 5$. Hasonlóan látható be, hogy az M_2-ből kapott négyszög is megfelel a feladat követelményeinek, és negatív körüljárású.

Eddig úgy értelmeztük a feladat követelményeit, hogy a mondott oldalak *egyenesei* menjenek át az M és N pontokon. Így lesz ez még a következő lépésben is, amikor a megoldások számát határozzuk meg. Nyilván nincs megoldása a feladatnak, ha M vagy N azonos A-val (M és N viszont lehetnek azonosak). Szerkesztésünk első lépései, a forgatás és a nyújtás mindig végrehajthatóak. Előfordulhat, hogy M_1, vagy M_2 azonos lesz N-nel. Ez nyilván csak úgy lehet, ha AM és AN merőlegesek egymásra, és $AM : AN = 2 : 5$. Ha ez így van, a feladatnak végtelen sok megoldása van, a CD egyenes tetszőleges, az N-en átmenő, de A-n át nem menő egyenes lehet.

Nem folytathatjuk a fent leírt úton szerkesztésünket akkor sem, ha az M_1N egyenes átmegy A-n (és akkor nyilván M_2N is átmegy), vagyis amikor MA merőleges NA-ra, de $MA : NA \neq 2 : 5$. Ebben az esetben a feladatnak nincs megoldása. Minden más esetben (ha tehát az MAN szög nem $90°$-os) az M_1 és M_2 pontokból egy–egy megoldást kapunk, tehát a feladatnak két megoldása van.

Érvényesek az eddigi állításaink akkor is, ha a feladat szövegét úgy értelmezzük, hogy az M és N pontoknak a BC és CD *szakaszok belsejében* kell lenniük, csak a kapott megoldások nem mind lesznek megfelelőek. Ha M valóban a BC, N a CD szakaszon van (és a négyszög körüljárása pozitív), akkor M_1 a CD szakasz D-n túli meghosszabbítására kerül, tehát N-ből az AM_1 szakasz hegyesszög alatt, MM_1 pedig tompaszög alatt látszik. Így rögzített A, M pontok mellett N-nek az AM_1 feletti k_1 Thalész–körön kívül, az MM_1 feletti g_1 Thalész–körön pedig belül kell lennie (2. ábra).



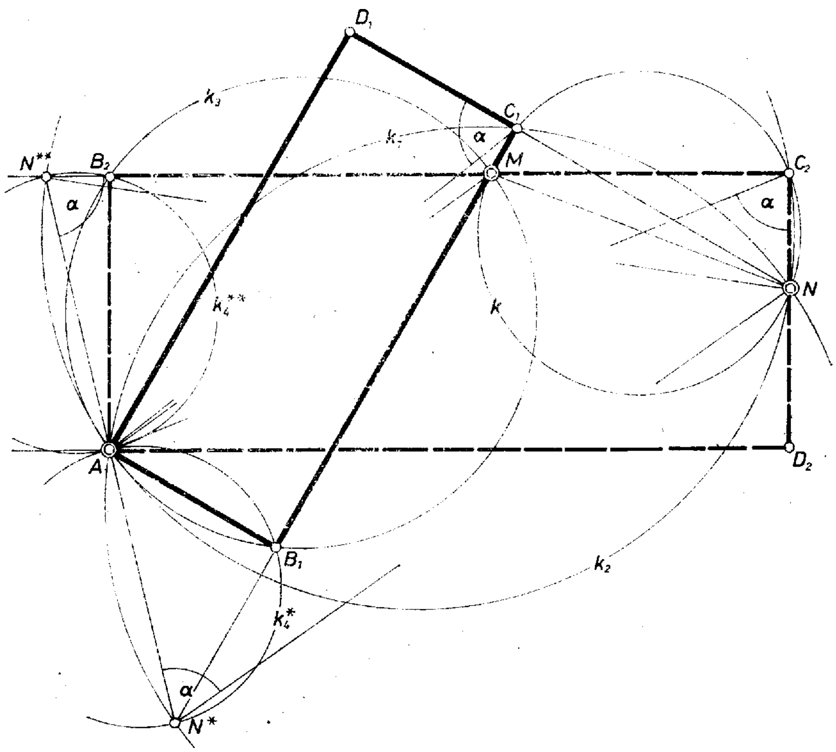
2. ábra

Mivel MM_1 elválasztja az A, N pontokat, és az AM_1N szög hegyesszög, N-nek az MM_1 egyenes A-t nem tartalmazó oldalán és az AM_1 re merőleges, M_1-en átmenő m_1 egyenesnek A-t tartalmazó oldalán kell lennie. Így kapjuk azt a T_1 tartományt, ahol N-nek lennie kell, ha a négyszög pozitív körüljárású; és negatív körüljárás esetén T_1-nek AM-re vonatkozó T_2 tükörképe lesz N lehetséges helye.

Az olvasóra hagyjuk annak belátását, hogy ha N a T_1-ben vagy T_2-ben van, akkor valóban egy megoldást kapunk.

Horváth Eszter (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

II. Megoldás. Ismét olyan megoldást keresünk, amelyben a téglalap oldal*egyenesei* mennek át az M, N ponton. Az oldalak adott aránya alapján a keresetthez hasonló téglalapot szerkesztünk, ebben az átlónak a rövidebb oldallal bezárt α szöge megadja az $ACD\sphericalangle$ nagyságát. α-val vagy $(180^\circ-\alpha)$-val egyenlő az AN szakasznak C-ből vett látószöge aszerint, hogy N-en a CD félegyenes megy át vagy a DC oldal C-n túli meghosszabbítása. Eszerint C-nek rajta kell lennie az AN szakasz α és $180^\circ-\alpha$ nyílású látókörívpárjai valamelyikén – vagyis a 3. ábra k_1 és k_2 köreinek egyikén (hiszen egy ilyen α szögű ív és az AN egyenes másik partján levő $(180^\circ-\alpha)$ szögű ív együtt egy teljes kört adnak).



3. ábra

Másrészt C rajta van az NM szakasz mint átmérő fölötti k Thalész–körön is.

Ezek alapján C csúcsként megfelel akár a k_1, k, akár a k_2, k körpár közös pontja, a keresett téglalap két oldalegyenese CN és CM, a másik kettő pedig ezekre merőleges és átmegy A-n.

A kapott téglalapban az ACD szög α-val egyenlő, ezért az $AB:BC$ arány egyenlő a „minta–téglalap" oldalainak arányával, továbbá a C-ben összefutó oldalak átmennek M-en, N-en, tehát a szerkesztés helyes.

Mivel N mind a három körnek közös pontja, azért mindig van megoldása a feladatnak. (Ha k érinti pl. k_1-et, akkor C-ként maga N veendő. A 3. ábrán k_1-ből adódik az $AB_1C_1D_1$ téglalap, k_2-ből az $AB_2C_2D_2$.)

László Andrea (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., I. o. t)
Horváth Gyöngyi (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Az α látószöget célszerű mindjárt „helyben" előállítani: az AN alap fölé mindkét oldalán $2\cdot AN/5$ magasságú téglalapot (ill. csak NAN^*, ill NAN^{**} derékszögű háromszöget) szerkeszteni, ezek körülírt köre k_1, ill k_2.

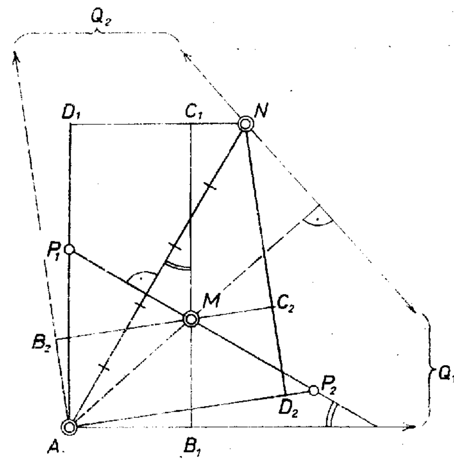
III. Megoldás. Vehetjük B-t vagy D-t is téglalapunk elsőként meghatározandó csúcsa szerepére, annak ellenére, hogy rájuk csak egy–egy mértani helyet ismerünk: a B csúcs az AM szakasz fölötti k_3, D pedig az AN szakasz fölötti k_4 Thalész–körön van. Ugyanis minden megoldásban B a D-nek a képe abban az A centrumú elfordítva zsugorításos transzformációban, melynek arányszáma $2:5$ és szöge 90° az egyik vagy a másik irányban. Ezért B-t a k_3-ból k_4-nek a mondott transzformációval adódó k_4^* , ill. k_4^{**} képe metszi ki. (A 3. ábrán csak e transzformáltak láthatók, mint AN-nek AN^*, AN^{**} képei fölötti Thalész–körök.)

Megjegyzés. Így $AB_1N^*\sphericalangle=AB_1M\sphericalangle=90^\circ$, tehát az első téglalap B_1C_1 oldalegyenese azonos az MN^* egyenessel, B_2C_2 pedig ugyanígy MN^{**}-gal. Ezzel lényegében új megoldást kaptunk, itt kevesebb körre van szükségünk.

IV. Megoldás. Jelöljük P-vel az M-en átmenő, AN-re merőleges egyenesnek AD-vel való metszéspontját. Ez kijelölhető, ugyanis származtatásánál fogva az MP szakasz ugyanakkora szöggel hajlik BA-hoz, mint az AN szakasz a BC-hez,így a szakaszok aránya egyenlő a vetületek arányával:

$$MP_i : AN = B_iA : B_iC_i = 2 : 5,$$
$$MP_i = \frac{2}{5}\,AN,$$

$i = 1$, 2, hiszen ez a szakasz M-től mindkét irányban fölmérhető (4. ábra). Ezzel már készen is vagyunk.



4. ábra

Ugyanezen elv szerint felhasználható lenne az AB egyenesnek az a Q pontja, ahol az N-ből AM-re állított merőleges áthalad.

Németh József (Eger, Gárdonyi G. Gimn., II. o. t.)