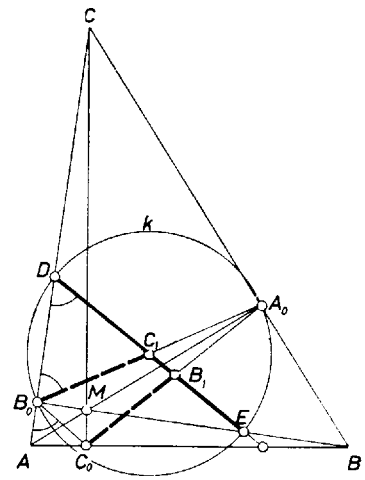
1. Ismeretes, hogy hegyesszögű háromszögben a talpponti háromszög belső szögfelezői rendre azonosak az eredeti háromszög magasságvonalával. (Ez következik például abból, hogy a háromszög magasságpontját M-mel jelölve,

$$AB_0C_0\sphericalangle = AMC_0\sphericalangle = A_0MC\sphericalangle = A_0B_0C\sphericalangle,$$

mert a középső két szöget ugyanaz a két egyenes határozza meg, az első és utolsó egyenlőség pedig abból következik, hogy az AM, illetve CM szakasz a B_0, C_0, illetve A_0, B_0 pontokból derékszög alatt látszik, tehát A_0, B_0, M, C_0, illetve A_0, C, B_0, M egy-egy körön vannak.)



Rajzoljuk meg az A_0B_0 szakasz feletti k Thalész-kört (középpontja C_1). A C pont ebben nincs benne, mert C-ből A_0B_0 hegyesszög alatt látszik. Emiatt k metszi a B_0C szakaszt, jelöljük a metszéspontot D-vel. Így a B_0C_1D háromszögben $B_0C_1 = DC_1$ és a C_1DB_0 és DB_0C_1 szögek egyenlők. Az utóbbi viszont – mint láttuk – egyenlő a C_0B_0A szöggel. Egyező ezeknek a szögeknek a forgási iránya is (az ábrán mindegyiké megegyezik az óramutató járásával), tehát C_1D párhuzamos B_0C_0-lal, és így átmegy B_1-en.

Ezzel tulajdonképpen azt láttuk be, hogy a B_1C_1 egyenest a C_1-túl épp az A_0B_0 szakasz felével kell meghosszabbítani, hogy az ABC háromszög határára – jelen esetben az AC szakaszra – érjünk.

Eddigi meggondolásainkat elmondhatjuk betűk nélkül is: azt kaptuk, hogy egy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének bármelyik középvonalát a talpponti háromszög bármelyik felezett oldalán túl épp az illető oldal felével kell megtoldani, hogy az eredeti háromszög határára jussunk. Ha tehát egy középvonalat mindkét irányban megtoldunk, akkor a teljes szakasznak a részei – azaz a középvonal egyeneséből az eredeti háromszögbe eső darabnak a részei – rendre egyenlők a talpponti háromszög egy-egy oldalának a felével, és a teljes szakasz hossza egyenlő a talpponti háromszög félkerületével. Ezzel a feladat állításának a bizonyításán túl azt is meghatároztuk, mekkorák a szóban forgó szakaszok.

2. Rátérünk a feladat kérdésének a vizsgálatára. Jelöljük egy tetszőleges tompaszögű háromszög tompaszögénél levő csúcsát, M-mel, a másik két csúcsot A-val és B-vel, a háromszög magasságpontját C-vel. Ekkor az ABC háromszög hegyesszögű, és a talpponti háromszöge azonos ABM talpponti háromszögével. Jelöljük ennek a csúcsait továbbra is A_0-lal, B_0-lal, C_0-lal, az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalfelező pontjait rendre A_1-gyel, B_1-gyel, C_1-gyel, az A_0B_0 feletti Thalész-kört k-val.

Mivel az A_0B_0 szakasz M-ből tompaszög alatt, B-ből pedig hegyesszög alatt látszik, azért M a k belsejében, B pedig a k-n kívül van, tehát k metszi a BM szakaszt, jelöljük a metszéspontot E-vel. Ez a már használt D-vel szemközti pontja k-nak, mert $B_0B \perp B_0C$, emiatt E is rajta van a B_1C_1 egyenesen. Ha tehát egy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének a középvonalára visszafelé mérjük fel az oldal felét, az eredeti háromszög magasságvonalára jutunk. (Ez így egy kicsit pontatlan: hogy melyik magasságvonalra, az abból határozható meg, hogy a választott középvonal, a felmért oldal és a magasságvonal az eredeti háromszög különböző csúcsaihoz tartozik.)

Ezek szerint a C_1B_1 félegyenesre az A_0B_0 oldal felét mérve a BB_0 magasságvonalra jutunk, a B_1-en túli meghosszabbításra pedig az A_0C_0 felét mérve az AB oldalra jutunk, tehát a B_1C_1 egyenesnek az ABM háromszögbe eső szakasza egyenlő $\frac{1}{2}(A_0C_0 + C_0B_0 - B_0A_0)$-lal. Hasonlóan látható, hogy ennyivel egyenlők az A_1B_1, A_1C_1 egyenesek ABM-beli szakaszai is, tehát a feladat eredeti állítása tompaszögű háromszögre változtatás nélkül igaz, csak az általunk a szakaszok közös értékéről adott kiegészítést kell módosítani.