a) Átírva az összeadást a szokásos oszlopos sémára, az utolsó két oszlopból

$$\overline{TY} + 2\cdot\overline{EN} = \overline{TY} + 100s, \qquad \overline{EN} = 50s,$$

ahol s a százas oszlopba jutó átvitel; értéke sem kevesebb, sem több nem lehet 1-nél, hiszen $E\neq N$, és így $0<\overline{EN}<100$. Ezért $N=0$, és $E=5$.

Így az összeg I ezres jegye legalább 1, ezért az ezres oszlopba a százasból jutó e átvitelnek legalább 2-nek kell lennie. De nem is jöhet több, hiszen $\overline{RTY}$ is, $\overline{TEN}$ is kisebb 1000-nél, a hátsó három oszlop összege 3000-nél, tehát $e=2$, $I=1$, $O=9$, továbbá

$$S = F + 1. \tag{1}$$

A százas oszlopban

$$2T + R + s = 20 + X,$$
$$2T + R = X + 19. \tag{2}$$

Ezek szerint R és X egyike páros, másika páratlan, és (1) szerint ugyanez áll az F,S párra. Ezekkel és a korábbi három páratlan jeggyel mind az öt páratlan számjegyet felhasználjuk, tehát a további két jegy: T és Y páros.

Továbbá $T,R\le 8$ és $X\ge 2$, ezért (2)-ből $2T\ge 13$, tehát $T=8$ és

$$R = X + 3. \tag{3}$$

Ezt a föltételt a még szabad 2, 3, 4, 6, 7 számjegyek közül csak az $R=6$, $X=3$ és az $R=7$, $X=4$ pár teljesíti, de az első pár mellett nem marad két szomszédos számjegy F és S szerepére (1)-nek megfelelően. Így egyrészt $R=7$, $X=4$, másrészt $F=2$, $S=3$, ennélfogva utolsóként $Y=6$, és ez valóban megoldása a feladatnak:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 9 & 7 & 8 & 6\\ & & 8 & 5 & 0\\ & & 8 & 5 & 0\\ \hline 3 & 1 & 4 & 8 & 6 \end{array}$$

és más megoldás nincs.

b) Tekintsük a feladatot szorzásnak:

$$\begin{array}{c} DREI\ \times 3\\ \hline NEUN \end{array}$$

és jelöljük a szorzat egyes, a tízes, és a százas számjegyének leírása után adódó „maradékot” rendre e,t,s betűvel. Így

(4) $\quad 3I = N + 10e,\qquad$ (5) $\quad 3E + e = U + 10t,$

(6) $\quad 3R + t = E + 10s,\qquad$ (7) $\quad 3D + s = N.$

Itt $e\le 2$, mert $3I<3\cdot 10$, hasonlóan $t\le 2$, mert $3\cdot\overline{EI}<3\cdot 100$, és ugyanígy $s\le 2$. Kivonva (4)-ből (7)-et

$$e + s = 3(I - D - 3e), \tag{8}$$

vagyis $e+s$ osztható 3-mal, tehát értéke 0 vagy 3.

Nem lehet azonban $s=0$, mert akkor egyszersmind $e=0$, tehát $I=D$, ami ki van zárva.

α) Próbálkozzunk az $s=1$ értékkel. Így (8)-ból $e=2$ és $I=D+7$. Figyelembe véve (4)-et is, a D,I,N betűhármas céljára a következő számjegyhármasok jönnek szóba:

$$0,\ 7,\ 1;\qquad 1,\ 8,\ 4;\qquad 2,\ 9,\ 7. \tag{9}$$

t kiküszöbölése végett adjuk össze (5)-öt és (6)-nak 10-szeresét; rendezés után

$$30R = 7E + U + 98 < 8\cdot 9 + 98 = 160, \tag{10}$$

másrészt $30R>98$; tehát $4\le R\le 5$.

Az $R=4$ érték kizárja (9) középső hármasát, és

$$7E + U = 22,$$

amiből vagy $E=2$ és $U=8$ vagy $E=3$ és $U=1$. Az első pár csak az első hármast hagyja meg (9)-ből:

$$D=0,\quad I=7,\quad \overline{DREI}=0427,\quad \text{és így}$$
$$NEUN = 1281, \tag{T$_1$}$$

ami a zérus kezdő számjegyre tekintettel csak tágabb értelemben vett megoldásként fogadható el.

Az $E = 3$ és $U = 1$ pedig csak (9) utolsó hármasát hagyja meg, ez valódi megoldás:

$$(\mathrm{V}_1) \qquad 2439 \cdot 3 = 7317.$$

Az $R = 5$ érték mellett (10)-ből $7E + U = 52$, amit csak az $U = 3$, $E = 7$ számjegypár teljesít, és (9) középső hármasával ismét valódi megoldást kapunk:

$$(\mathrm{V}_2) \qquad 1578 \cdot 3 = 4734.$$

β) Hasonlóan $s = 2$ mellett $e = 1$, (4)-ből $4 \le I \le 6$, (8)-ból $I = D + 4$, és D, I, N-re két számjegyhármas lehetséges:

$$(11) \qquad 0,\ \ 4,\ \ 2 \qquad 2,\ \ 6,\ \ 8$$

(ugyanis az $I = 5$ érték $I = N$-re vezet). A (10) megfelelője:

$$30R = 7E + U + 199 > 199, \qquad R \ge 7.$$

Az $R = 7$ próbálkozásból $7E + U = 11$, ami csak $E = 1$, $U = 4$ mellett teljesül és (11) második triója újabb valódi megoldást ad:

$$(\mathrm{V}_3) \qquad 2\,7\,1\,6 \cdot 3 = 8\,1\,4\,8.$$

Hasonlóan $R = 8$-ból $7E + U = 41$, $E = 5$, $U = 6$, és nem valódi megoldás:

$$(\mathrm{T}_2) \qquad 0\,8\,5\,4 \cdot 3 = 2\,5\,6\,2,$$

végül $R = 9$ esetén $7E + U = 71$, ez csak $U = 8$, $E = 9 = R$ mellett teljesülne.

c) Mindezek szerint a német feladatnak három valódi és két tágabb értelemben vett megoldását találtuk. (V_1)–(V_3), ill. (T_1), (T_2) alatt, az angol feladatra pedig csak egy megoldás adódott.

Megjegyzések. 1. Az *a)* részben az (1) kapcsolat ismeretében így is mehetünk tovább. Nem választhatjuk az F, S számpár tagjait a 6, 7, 8 számok közül, mert akkor R és T szerepére ezek közül csak egy maradna, és közülük még a legnagyobb, a 8-as, a szóba jövő következő 4-es számjeggyel a $T = 8$, $R = 4$ választás mellett is csak 20-at ad az $(R + T + T)$ összegre, amiből $s = 1$ miatt $X = 1$ következne, viszont az 1-es már foglalt.

Ezek szerint az F, S számpár tagjai a 2, 3, 4 számjegyek közül valók: vagy $F = 2$, $S = 3$, vagy pedig $F = 3$, $S = 4$. A $(T + T + R)$ összeg legfeljebb $8 + 8 + 7 = 23$, így $s = 1$ miatt X legfeljebb 4, és az előbbi két eset közül az elsőben $X = 4$, a másodikban $X = 2$. Ha $X = 4$, $R + T + T = 23$, tehát $R = 7$, $T = 8$, és Y csak az eddig nem használt 6-os lehet:

$$2\,9\,7\,8\,6 + 8\,5\,0 + 8\,5\,0 = 3\,1\,4\,8\,6.$$

Ha $X = 2$, így $R + T + T = 21$, ami nem lehet ($T = 8$ a foglalt $R = 5$-re, $T = 7$ a T-vel egyenlő $R = 7$ értékre vezet).

2. A feladat *b)* részében a zérusnak kezdő számjegyként való elfogadása nem indít el olyan tovább ágazó kérdéseket, mint nemrég az 1378. gyakorlat esetében.[1]

[1] K. M. L. 44 (1972) 119. o.