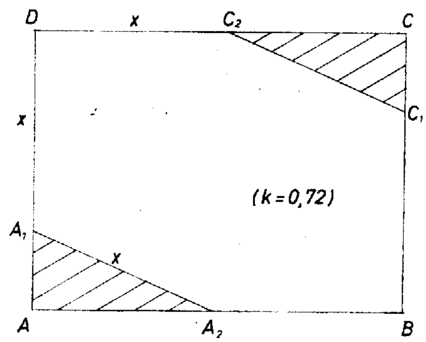
I. Legyen az $ABCD$ téglalapban $AB = a$, $BC = ka$, a két levágott háromszög AA_1A_2 és CC_1C_2 úgy, hogy $A_1A_2 = A_2B = BC_1 = C_1C_2 = = C_2D = DA_1 = x$. Így $AA_1 = AD - DA_1 = CC_1 = ka - x$, és $AA_2 = CC_2 = = a - x$, ezért a derékszögű háromszögekből:

$$AA_1^2 + AA_2^2 - A_1A_2^2 = (ka - x)^2 + (a - x)^2 - x^2 =$$
$$= x^2 - 2(1 + k)ax + (1 + k^2)a^2 = 0.$$

A gyökök valósak és különbözők, mert a diszkrimináns pozitív: $8a^2k > 0$, és mindkettő pozitív, mert összegük is, szorzatuk is pozitív. A két gyök összege $2a(1 + k)$, egyenlő a téglalap kerületével, ezért csak a kisebb gyök felelhet meg. S mivel ez a feladat közlése szerint meg is felel, azért



$$x = a(1 + k - \sqrt{2k}) < ka,$$
$$1 - \sqrt{2k} < 0, \qquad k > \frac{1}{2}.$$

Ezt mondhatjuk k értékéről.

2. A kérdéses arány

(1) $$q = \frac{6x}{2(1 + k)a} = \frac{3(1 + k - \sqrt{2k})}{1 + k} = 3 - \frac{3\sqrt{2k}}{1 + k},$$

ennélfogva ha $0 < k_1 < k_2 \leq 1$, akkor a megfelelő arányértékek különbsége

$$q_2 - q_1 = \left(3 - \frac{3\sqrt{2k_2}}{1 + k_2}\right) - \left(3 - \frac{3\sqrt{2k_1}}{1 + k_1}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{1 + k_1} - \frac{\sqrt{k_2}}{1 + k_2}\right) =$$
$$= 3\sqrt{2}\frac{(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2})(1 - \sqrt{k_1k_2})}{(1 + k_1)(1 + k_2)} < 0, \quad \text{tehát}$$
$$q_2 < q_1,$$

ugyanis a számláló első tényezője negatív, hiszen a föltevés szerint $\sqrt{k_1} < \sqrt{k_2}$, a többi tényező pozitív, mert $0 < k_1k_2 < 1$.

Kimondhatjuk tehát, hogy az arány az (1) képlet szerint függ k-tól és k növekedésével monoton csökken.

Kelemen Dezső (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., II. o. t.)