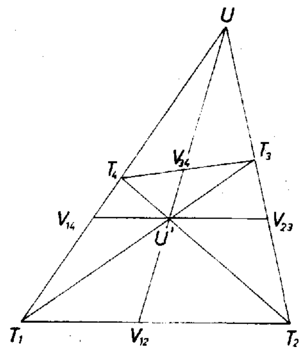
I. megoldás. 1. Bebizonyítjuk a következő segédtételt: A tetszőleges $T_1T_2T_3T_4$ négyszög T_2T_3 és T_4T_1 oldalegyenesei messék egymást egy U pontban, T_1T_3 és T_2T_4 átlói egy U'-ben, így T_3T_4 akkor és csak akkor párhuzamos T_1T_2-vel, ha az UU' egyenes felezi a T_1T_2 oldalt.

Húzzunk párhuzamost U'-n át a T_1T_2 oldallal, jelöljük a T_1T_4 és a T_2T_3 oldallal való metszéspontját V_{14}-gyel, ill. V_{23}-mal, az UU' egyenesnek a T_1T_2 és a T_3T_4 oldallal való metszéspontját V_{12}-vel, ill. V_{34}-gyel (1. ábra).



1. ábra

Ekkor az U, T_4, T_3 csúcsú szögek szárait átmetsző párhuzamosok alapján mindenesetre

$$\frac{U'V_{14}}{V_{12}T_1}=\frac{U'U}{V_{12}U}=\frac{U'V_{23}}{V_{12}T_2}, \tag{1}$$

$$\frac{T_2T_1}{U'V_{14}}=\frac{T_1T_4}{V_{14}T_4}, \tag{2}$$

$$\frac{T_1T_2}{U'V_{23}}=\frac{T_2T_3}{V_{23}T_3}. \tag{3}$$

Ha most még $T_1T_2||T_3T_4$ is fennáll, akkor (2) és (3) jobb oldalai egyenlők, ezért a bal oldalak nevezői is egyenlők: $U'V_{14}=U'V_{23}$, így az (1)-beli szélső törtek nevezői is egyenlők, V_{12} felezi T_1T_2-t, ami állításunk első része (és ekkor persze V_{34} is felezi T_3T_2-et, U' felezi $V_{14}V_{23}$-at).

Ha viszont, a $V_{12}T_1=V_{12}T_2$ egyenlőséget tesszük föl, akkor az (1)-beli első és utolsó számláló is egyenlő, ezért (2) és (3) bal oldalai is egyenlők, ezért jobb oldalaik egyenlőségét fölhasználva

$$\frac{T_2T_4}{U'T_4}=\frac{T_1T_4}{V_{14}T_4}=\frac{T_2T_3}{V_{23}T_3}=\frac{T_1T_3}{U'T_3},$$

a szélső arányokból 1-et – 1-et levonva

$$\frac{T_2U'}{U'T_4}=\frac{T_1U'}{U'T_3},$$

tehát $T_1T_2||T_3T_4$; ezzel segédtételünk második részét is bebizonyítottuk.

2. Jelölje feladatunkban E és G az SO egyenesnek rendre az AB-n, CD-n levő pontját, F és H az AB-vel O-n át húzott párhuzamosnak rendre az AD-n, BC-n levő pontját, jelöljük továbbá az EH, FG egyenespár metszéspontját J-vel, az EF, GH párét K-val. Ekkor segédtételünk első része szerint E felezi AB-t, továbbá O az FH-t, G a CD-t felezi, hiszen föltevés szerint $AB||CD||FH$. Így pedig segédtételünk második részét az $FHJK$ négyszögre alkalmazva $KJ||FH||AB$, hiszen e négyszögben a két átló metszéspontja G, a KF, JH oldalegyenespáré E, az EG egyenes O-ban felezi az FH oldalt.

Ezek szerint ha $AB||CD$ és az S pont létrejön (vagyis $AB\neq CD$), akkor a kérdéses egyenes mindig párhuzamos AB-vet.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

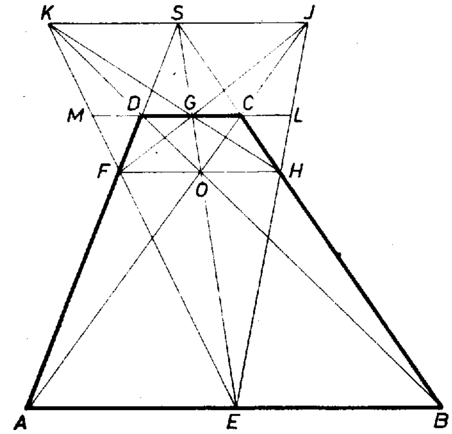
Megjegyzések. 1. Ha segédtételünknek csak az első felét bizonyítjuk („ha $AB||CD$, akkor $EA=EB$, $GD=GC$ és $DF=OH$"), akkor megoldásunkat így fejezhetjük be. Messe a CD egyenes EH-t L-ben, EF-et M-ben, ekkor $GL=GM$, és

$$\frac{FJ}{GJ}=\frac{FH}{GJ}=\frac{HF}{GM}=\frac{HK}{GK},\qquad \frac{FJ}{GJ}-1=\frac{FG}{GJ}=\frac{HG}{GK},$$

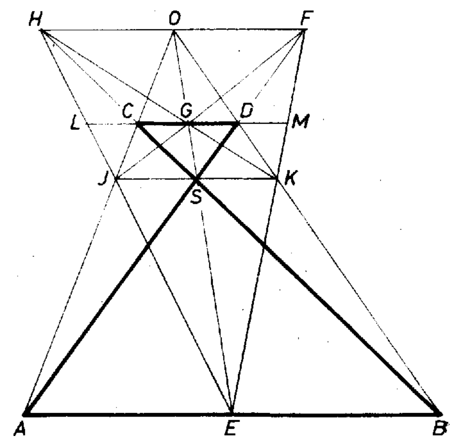
a GFH és GJK háromszögek középpontosan hasonlók, tehát $JK||FH||AB$. (Tehát lényegében itt bizonyítjuk segédtételünk második részét.)

2. Többek *ismert tétel*ként hivatkoztak a segédtétel első részére. A korábbi tankönyvben valóban szerepelt ez, de a jelenlegiben nem. (Emiatt adtuk bizonyítását már az 1244. gyakorlatban is, K. M. L. 39 (1969) 62. oldal.) Egyébként az $AB=2\cdot DC$ esetben O az ABS háromszög súlypontja és SO az AB-hez tartozó súlyvonal.

A segédtételt szemléletesen, így is kimondhatjuk: ha $AB||CD$ és $AB \neq CD$, akkor az $ABCD$ trapéz *ferdén szimmetrikus* a szárak S metszéspontját az átlók O metszéspontjával összekötő egyenesre, 2 megfelelő pont összekötő egyenese párhuzamos AB-vel, és a köztük levő szakaszt az SO egyenes felezi.



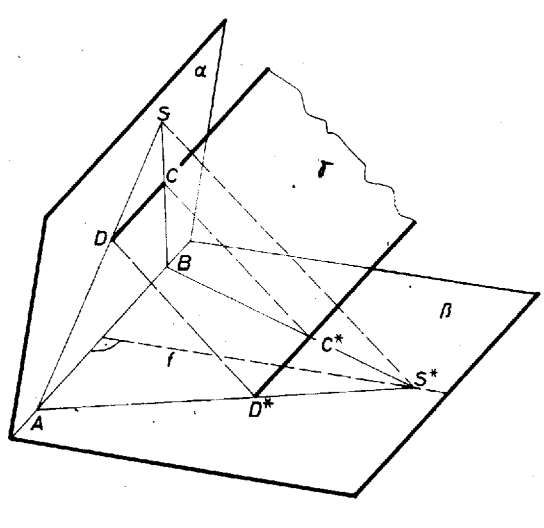
2. ábra



3. ábra

3. Bizonyításunkban a trapéz szárai és átlói nem játszottak egymástól lényegesen különböző szerepet. A bizonyítás érvényes a 3. ábrára is – amelynek kiindulása a 2. ábráétól csupán a C és D fölcserélésében különbözik (vagyis itt $ABCD$ hurkolt trapéz). Könnyen adódik az összehasonlításból az a sejtés, hogy a JK- szakasz felezőpontja éppen S, és hogy J, K rajta van az AC, ill. BD átlón; ezek bizonyítását ajánljuk az olvasónak.

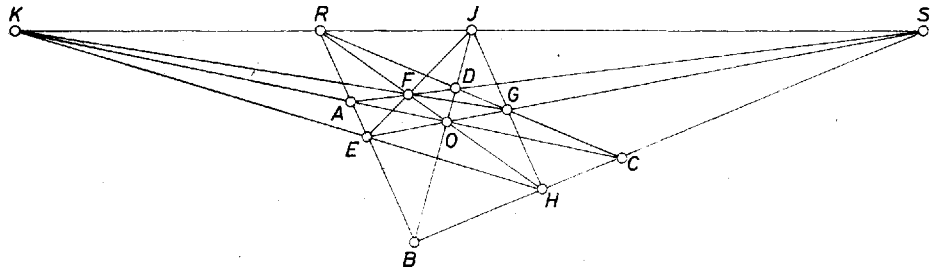
II. megoldás. Ha $ABCD$ szimmetrikus trapéz, akkor az SO egyenes éppen a szimmetriatengely, merőleges az alapokra, az alakzatot előállító pontok egyenesek, is tükrös párokba kapcsolhatók, és így a kérdéses egyenes önmagának a képe, merőleges OS-re, párhuzamos az alappal. Eszerint tüstént készen vagyunk tennivalónkkal, ha találunk olyan transzformációt, amely bármely $ABCD$ trapézt szimmetrikus trapézba visz át (és a további szerkesztő lépéseket meghagyja).



4. ábra

Vegyünk evégett az AB egyenesen át egy, az alakzatunk α síkjától különböző β síkot és benne az AB szakasz felező merőlegesén egy S^* pontot – amely nincs rajta magán az AB szakaszon is – és vetítsük rá alakzatunkat β-ra az SS^*-gal párhuzamos vetítő egyenesek felhasználásával. Mivel így az ABS háromszög képe az ABS^* egyenlő szárú háromszög, elég azt belátnunk, hogy a CD egyenes C^*D^* képe párhuzamos AB-vel. Valóban, a CC^*, DD^* párhuzamos vetítő egyenesek gamma síkja α-t CD-ben, β-t C^*D^*-ban metszi, és ha AB-nek és C^*D^*-nak volna egy közös X pontja, ez α, β, γ mindegyikében benne volna, tehát AB-nek és CD-nek közös pontja lenne, amit kizártunk. Így pedig a C^*D^* egyenes az ABS^* egyenlő szárú háromszögből szimmetrikus trapézt metsz le. Most már $J^*K^*||AB$, J^*K^* visszavetítése α-ra a JK egyenes, és ez ugyanúgy párhuzamos AB-vel, amint azt C^*D^*-ról láttuk. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

(Három egyező – tehát nem versenyszerű – dolgozat ötlete alapján; egyébként kidolgozásuk egyformán hibás is.)



5. ábra

Megjegyzés. Ha A, B, C, D négy pont, semelyik három sincs egy egyenesen, az AC és BD, az AD és BC, az AB és CD egyenespár metszéspontja rendre O, S, ill. R, az OS egyenes közös pontja AB-vel és CD-vel E, ill. G, az OR egyenesé AD-vel, BC-vel F, ill. H, akkor az EF, GH és az EH, FG egyenespárok J, K metszéspontjai által meghatározott egyenes azonos az RS egyenessel (5. ábra). Ezt az állítást az ún. projektív geometriában egyszerűen bizonyítják. Az ábra mindegyik egyenesén a megbetűzött 4 pont ún. harmonikus pontnégyest alkot, az általuk meghatározott szakaszok közül kettő-kettőnek az aránya egyenlő, pl. $AE : BE = AR : BR$ (és így persze $AE : AR = BE : BR$). Az érdeklődőknek ajánljuk *Vigassy Lajos* következő Középiskolai Szakköri Füzeteit: Geometriai transzformációk; Projektív geometria.