a) $n=1$ esetére az állítást annak a meglátása igazolja, hogy a hatványozandó $(3-\sqrt{7})$ alapban $(-\sqrt{7})$ együtthatója, $B_1=1$ is és a másik tag, $A_1=3$ is természetes szám.

$n=2$ esetén $(3-\sqrt{7})^2=16-6\sqrt{7}$, tehát $B_2=6$ és $A_2=16$, az állítás igaz. $n=3$ esetében

$$\begin{aligned}(3-\sqrt{7})^3&=(3-\sqrt{7})^2(3-\sqrt{7})=(A_2-B_2\sqrt{7})(A_1-B_1\sqrt{7})=\\&=(A_1A_2+7B_1B_2)-(A_1B_2+A_2B_1)\sqrt{7},\end{aligned}$$

és mindkét zárójelben természetes szám áll, mert természetes számok szorzata és összege természetes szám.

Hasonlóan abból a feltételezésből, hogy az állítás igaz, ha n helyére egy bizonyos k természetes számot írunk:

$$(3-\sqrt{7})^k=A_k-B_k\sqrt{7},\ \text{ahol } A_k, B_k \text{ természetes számok},$$

következik, hogy az állítás igaz a k-ra következő $(k+1)$ természetes számra is, mert a

$$\begin{aligned}(3-\sqrt{7})^{k+1}&=(3-\sqrt{7})^k(3-\sqrt{7})=(A_k-B_k\sqrt{7})(A_1-B_1\sqrt{7})=\\&=(A_1A_k+7B_1B_k)-(A_1B_k+A_kB_1)\sqrt{7}\end{aligned}$$

számításból kapott

(2)
$$A_{k+1}=A_1A_k+7B_1B_k \quad \text{és} \quad B_{k+1}=A_1B_k+A_kB_1$$

együtthatók szintén természetes számok. Eszerint az állítás igaz $n=1,2,3,\ldots$-ra, minden természetes számra.

b) (1)-et B_n-nel osztva

(3)
$$\frac{A_n}{B_n}-\sqrt{7}=\frac{(3-\sqrt{7})^n}{B_n},$$

és itt n növelésével a számláló csökken, hiszen alapjára fennáll: $0<3-\sqrt{7}<1$, a nevező viszont növekszik, hiszen (2) szerint $B_n>B_{n-1}$, tehát A_n/B_n és $\sqrt{7}$ eltérése csökken, ha n-et növeljük. Azt is látjuk, hogy a hányados felülről közeledik $\sqrt{7}$-hez, mert különbségük minden n-re pozitív.

A hibának $10^{-4}=1/10^4$ alá csökkentése végett vegyük észre, hogy

$$3-\sqrt{7}<\frac{3}{8},\ \text{ugyanis } \sqrt{7}>3-\frac{3}{8}=\frac{21}{8},\ \text{hiszen } 7\cdot 8^2>21^2,$$

másrészt (2) második kifejezése alapján

$$B_n>A_1B_{n-1}=3B_{n-1}>3A_1B_{n-2}=3^2B_{n-2}>\ldots>3^{n-1}B_1=3^{n-1}.$$

Így a kívánt pontossághoz elég teljesíteni a következőt:

$$\frac{A_n}{B_n}-\sqrt{7}<\frac{(3/8)^n}{3^{n-1}}=\frac{3}{8^n}<\frac{1}{10^4}$$

(a (3)-beli számlálót növeltük, a nevezőt csökkentettük; ha az így növelt érték kisebb a korlátnál, akkor a becsült hiba is kisebb nála), vagyis olyan n-et keresni, amelyre

$$8^n>3\cdot 10^4, \quad \text{azaz } 2^{3n}>30\,000.$$

Mivel $2^5=32$ és $2^{10}=32^2=1024>1000$, tehát $2^{15}>32\,000$, azért a legutóbbi követelménynek megfelel minden olyan kitevő, melyre $3n\geqq 15$, vagyis amelyre $n\geqq 5$.

Megjegyzések. 1. Sokan kiszámították, hogy megfelelő kitevő már az $n=4$ is, már az $A_4/B_4=508/192$ hányados is 10^{-4}-nél kisebb hibával közelíti meg $\sqrt{7}$-et. Ehhez az összehasonlításhoz azonban magát $\sqrt{7}$-et számították ki legalább 5 tizedes jegyre. Ez a kérdés lényegének a meg nem értését mutatja, de a „pontos számításokhoz” szokott tanulók részéről nem hibáztatható.

A hibaszámítás lényege éppen az, hogy egy aránylag nehezebben kiszámítható mennyiségre egy közelítő érték pontosságát (hibáját) anélkül becsüljük meg, hogy a vizsgált mennyiség pontos értékét felhasználnánk. Ez utóbbi esetben ugyanis a közelítés értelmét vesztené: ha ismerjük a vizsgált mennyiség pontos értékét (vagy legalább is a használt közelítésnél pontosabb értékét), akkor nincs szükség közelítő értékre.

2. Próbálja meg az érdeklődő olvasó a kívánt n kitevő megbecslését a $3-\sqrt{7}<1/2$ és $B_n>4B_{n-1}$, $B_n>16B_{n-2}$ becslések alapján végezni, az utóbbit persze előbb igazolnia kell. Ez is arra vezet, hogy egyetlen számnak – a 2-nek – kell egy bizonyos korlátnál nagyobb hatványát keresni.