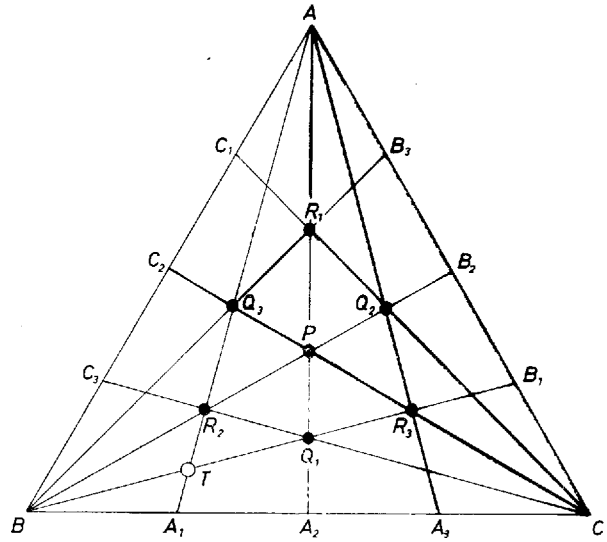
1. Megmutatjuk, hogy az adott $ABC = H$ szabályos háromszög belsejében kétféleképpen lehet kijelölni a feladat első mondata szerinti három pontot. Ebből mindjárt adódik a kérdés magyarázatául, hogy a két tanuló a két különböző ponthármasbeli távolságokat adta meg; csak azt kell majd még belátnunk, hogy a két ponthármas által meghatározott távolságok különböznek egymástól.

Rajzoljuk meg a BAC, CBA, ACB szöget negyedelő egyeneseket és jelöljük a szemben levő BC, CA, AB oldallal való metszéspontokat az A, B, C forgási irány szerint rendre A_i-vel, B_i-vel, C_i vel ($i = 1, 2, 3$).



A keresett ponthármas pontjait a H csúcsaival összekötő egyenesek csak e 9 egyenes közül valók lehetnek, tehát csak olyan pontok jöhetnek szóba, amelyeken három ilyen szögnegyedelő megy át. Vannak ilyen pontok, hiszen AA_2, BB_2, CC_2 a H szimmetriatengelyei és mindegyik tengelyre vonatkozóan a többi negyedelők tükrös párokat alkotnak, és így a tengelyen metszik egymást. Az AA_2 tengelyen van a BB_1, CC_3 pár, a BB_2, CC_2 pár és a BB_3, CC_1 pár metszéspontja, jelöljük ezeket rendre Q_1-gyel, P-vel, R_1-gyel. Hasonlóan kapjuk a BB_2 tengelyen a Q_2, P, R_2 és a CC_2-n a Q_3, P, R_3 a hármas metszéspontokat.

E 7 ponttal felsoroltuk a szögnegyedelők összes hármas metszéspontját. Elég belátni ehhez a szimmetriák alapján azt, hogy valamelyik szélső negyedelőn, pl. AA_1-en nincs további hármas metszéspont. A rajta eddig megállapított R_2-t és Q_3-at B-vel összekötő egyenes a BB_2, ill. BB_3, így a B-ből induló negyedelők közül már csak a BB_1-gyel való T metszéspontja jöhet szóba. Ez azonban BB_1-nek az AB és AA_2 közti BQ_1, szakaszán van mint belső pont, ezért $BCT\sphericalangle < BCQ_1\sphericalangle = 15°$, tehát T-n nem megy át negyedelője az ACB szögnek; ezt akartuk belátni.

A talált 7 hármas metszéspont mindegyike rajta van a H valamelyik tengelyén, P pedig mind a három tengelyen rajta van. Így P semelyik Q_i-vel vagy R_i-vel ($i = 1, 2, 3$) nem tartozhat egy, a feladat szerinti ponthármasba, különben a ponthármast A-val, B-vel, C-vel összekötve nem kapnánk meg H-nak mind a 9 szögnegyedelőjét, pl. ha P a Q_1-gyel tartozna egy ponthármasba, akkor vagy AA_1- et vagy AA_3-at nem kapnánk meg.

Hasonlóan adódik, hogy Q_1 nem tartozhat egy ponthármasba sem R_1-gyel (AA_2 miatt), sem R_2-vel, sem R_3-mal (CC_3, ill. BB_1 miatt). A Q_1, Q_2, $Q_3 = H_q$ ponthármas viszont előállítja H-nak mind a 9 szögnegyedelőjét. Ugyanígy kapjuk az R_1, R_2, $R_3 = H_r$ hármast és azt, hogy több megfelelő ponthármas nem állítható össze a 7 hármas metszéspont közül. Ezzel a megoldás elején kimondott állítást bebizonyítottuk. A H-nak P körüli 120°-os forgási szimmetriájából az is következik, hogy mind a H_q, mind a H_r ponthármasok egy-egy szabályos háromszög csúcsai.

2. Áttérve az előre jelzett számításra, a H_q, H_r szabályos háromszögeknek csak egy oldalát kell kiszámítanunk. Ezek egyenlők a köréjük írt kör PQ_1, ill. PR_1 sugarának $\sqrt{3}$-szorosával.

PQ_1, a PBA_2 derékszögű háromszögben a B-nél levő szög felezőjével kettévágott PA_2 oldalnak része, és e háromszög oldalai $BA_2 = 1/2$, $A_2P = AA_2/3 = \sqrt{3/6}$ és $PB = 2AA_2/3 = \sqrt{3}/3$.
Ezért

$$PQ_1 : Q_1A_2 = PB : A_2B,$$

$$PQ_1 : (PQ_1 + Q_1A_2) = PQ_1 : PA_2 = PB : (PB + A_2B),$$

$$PQ_1 = PA_2\frac{PB}{PB + A_2B} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

BCR_1 a szerkesztés szerint egyenlő szárú derékszögű háromszög, így

$$PR_1 = A_2R_1 - A_2P = BA_2 - A_2P = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ezekből az előre bocsátottak alapján

$$Q_1Q_2 = \sqrt{3} \cdot PQ_1 = 2 - \sqrt{3}\,(= 0{,}268),$$

$$R_1R_2 = \sqrt{3} \cdot PR_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,(= 0{,}366),$$

és eredményeink igazolják a megoldás elején a kérdés magyarázatára közölt elgondolásunkat.

Megjegyzés. Ha a feladat nem kérdezte volna a lehetséges számeredményeket, akkor a 2. pont helyett elég lett volna ezt mondanunk: H_q és H_r háromszögek oldalainak aránya a nyilvánvalóan hasonló AQ_3Q_2 és AR_2R_3 háromszögekből

$$\frac{Q_3Q_2}{R_2R_3} = \frac{AQ_3}{AR_2} < 1,$$

mert Q_3 benne van az ABP háromszögben, AQ_3 része az AR_2-nek, tehát $Q_3Q_2 \neq R_2R_3$.