I. megoldás. A $BAC=\alpha$ szög a szerkesztés szerint megismétlődik a BAC_1 CBA_1 és ACB_1 szögekben, ugyanígy az $ABC=\beta$ szög az ABC_1, BCA_1 és CAB_1 szögekben. Ezért egyrészt CB_1 is, CA_1 is párhuzamos AB-vel a váltószögek alapján, tehát C rajta van az A_1B_1 egyenesen, másrészt $BAB_1\sphericalangle=ABA_1\sphericalangle=\alpha+\beta$. Így pedig az ABA_1B_1 négyszög szimmetrikus trapéz (tekintet nélkül az eredeti ACB szög nagyságára, az 1. ábrán már nem is derékszöget rajzoltunk C-nél), másrészt C_1 a C tükörképe az AB egyenesre nézve, tehát CC_1 merőleges az AB-re.

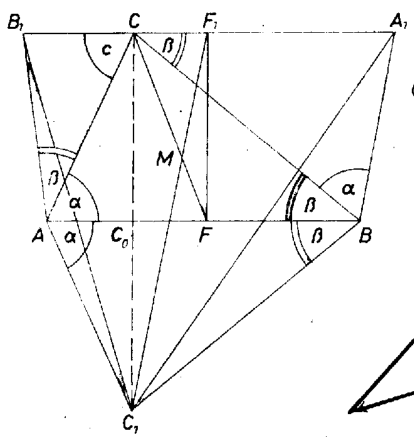
Legyen az AB, A_1B_1 alap felezőpontja F, ill. F_1, és messe az ABC háromszög CF súlyvonala az $A_1B_1C_1$ háromszög C_1F_1 súlyvonalát M-ben. Ekkor FF_1 a trapéz tengelye, merőleges AB-re, tehát párhuzamos CC_1 gyel, és $FF_1=C_0C$ – ahol C_0 a C vetülete AB-n, – és $C_1C=2C_0C=2FF_1$ Ezek szerint a CC_1M háromszög az FF_1M háromszögnek 2-szeresre nagyított képe M-ből mint centrumból, $MC=2MF$, és $MC_1=2MF_1$ tehát M úgy harmadolja a CF C_1F_1 súlyvonalakat, hogy a kétszeres rész a csúcs felé esik. Így pedig M mindkét háromszögnek súlypontja, az állítást bebizonyítottuk.

Ha az ABC háromszögben $\alpha=\beta$, vagyis $CA=CB$, akkor $CA_1=CB_1$, és F_1 azonos C-vel, F pedig C_0-lal, M-ről nem beszélhetünk. Ekkor a súlypontokat rendre S-sel, S_1-gyel jelölve, mindkettő a CC_1 egyenesen van és $CS=\dfrac{2}{3}CC_0=\dfrac{1}{3}CC_1=CS_1$, tehát S_1 azonos S-sel.

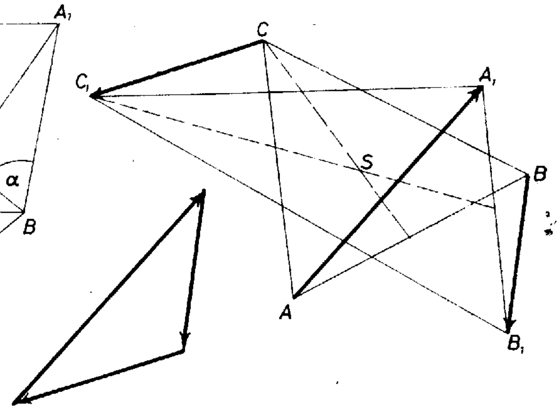
Nem használtuk fel, hogy az ACB szög derékszög, az összegről is csak azt, hogy kisebb $180°$-nál, ennélfogva az állítás minden háromszögre érvényes.

Hídvégi Attila (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)
Wettstein József (Budapest, Piarista Gimn.)

Megjegyzés. Vegyük észre az utoljára kimondott általánosítással kapcsolatban, hogy a betűzésben látható szimmetria ellenére az állításban a C betű megkülönböztetett szerepet játszik; másképpen: A és B kiemelt szerepet kapnak mindjárt azzal, hogy az ABC_1 és ABC háromszögek úgy hasonlók, hogy A-nak is, B-nek is önmaga felel meg, viszont C-nek nem.



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Egy tetszőleges ABC háromszög S súlypontja akkor és csak akkor súlypontja egyszersmind az ugyanazon síkban fekvő $A_1B_1C_1$ háromszögnek is, ha

$$\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SC_1}=\overrightarrow{\mathbf{0}}$$

(a zérusvektor). Mármost mindenesetre

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SA_1},\ \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SB_1},\ \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SC_1} \tag{1}$$

és S definíciója szerint

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{\mathbf{0}},\quad \text{azaz}\quad \overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Így (1)-ből összeadással a súlypont közös voltának szükséges és elegendő föltétele, kizárólag a háromszögek csúcsai alapján (2. ábra):

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Ezt célunknak megfelelően az alábbiak szerint alakítjuk:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AB}\quad \text{és}\quad \overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A}=\overrightarrow{BA}$$

összeadásával

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{B_1A})=\overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

tehát teljesülnie kell a következőnek:

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1A},$$

és ez az I. megoldásban mondottak szerint teljesül is.

Katona Klára (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)