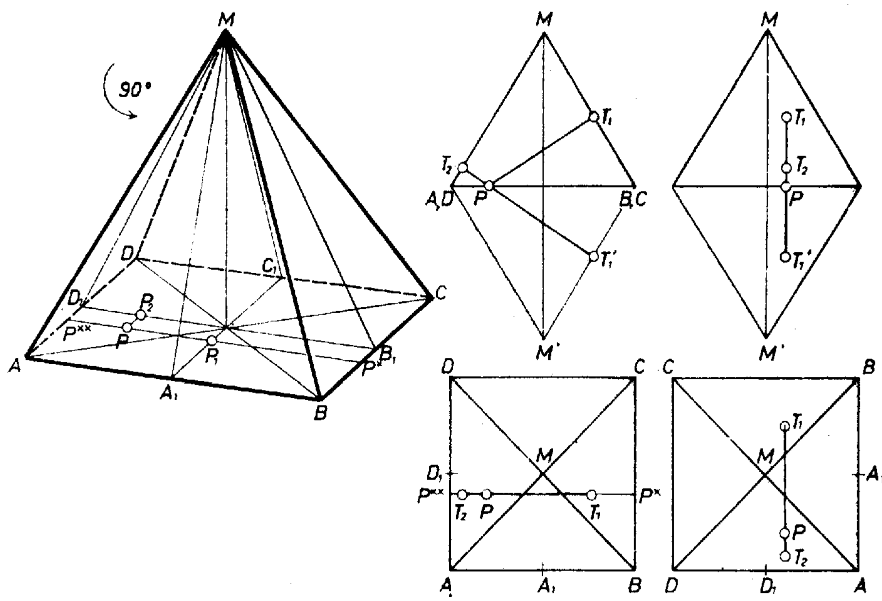
I. megoldás. Tükrözzük a gúlát az $ABCD$ négyzet síkjára. Mint tudjuk, a tükrözés távolságtartó és szögtartó leképezés, mely a négyzetlap pontjaihoz önmagukat rendeli. Az M pont M' képét az A, B, C, D pontokkal összekötve az eredeti gúla tükörképét kapjuk. Mivel a gúla szabályos, az oldalélei egyenlő hosszúak, az MM' egyenes átmegy az alap középpontján, így az $MAM'C$ és $MBM'D$ négyszögek rombuszok, tehát MC párhuzamos $M'A$-val és MB párhuzamos $M'D$-vel. Ezért a BMC sík párhuzamos a $DM'A$ síkkal.

A P-ből a BMC és AMD lapok síkjára állított merőlegesek talppontját jelöljük T_1-gyel, ill. T_2 vel, a T_1-nek az $ABCD$ síkra vonatkozó tükörképe pedig legyen T_1'. (E pontok természetesen nem lesznek bármely P esetében az MBC, MAD, $M'BC$ háromszög kerületén belül; az ábrán mind beleesnek). A tükrözés miatt $PT_1 = PT_1'$, T_1' rajta van a $BM'C$ síkon és a PT_1' egyenes merőleges erre, tehát a vele párhuzamos MAD-re is, vagyis T_1' a PT_2 egyenesbe esik. Így a $PT_2 + PT_1 = T_2T_1'$ távolság egyenlő a DMA és $BM'C$ síkok távolságával, ami független a P pontnak az $ABCD$ négyzet belsejében vagy a kerületén elfoglalt helyzetétől.

Ugyanígy a P pontnak az AMB és CMD síkoktól mért távolságának összege egyenlő az AMB és $CM'D$ párhuzamos síkok távolságával. Ugyanis a gúlát az MM' tengely körül 90°-kal elforgatva a DMA sík átmegy az AMB-síkba, a $BM'C$ sík a $CM'D$ síkba, tehát a két összeg egyenlő. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.



II. megoldás. Könnyen visszavezethetjük a feladat állítását arra az ismert, síkbeli tételre, hogy az egyenlő szárú háromszög alapján felvett P pontnak a száraktól vett távolságösszege független a P pont helyzetétől és megegyezik az egyenlő szárú háromszög szárához tartozó magasság hosszával (gimn. I. o. tankönyv 321. old. 3. feladat).

Legyen az AB, BC, CA, AD él felezőpontja rendre A_1, B_1, C_1, D_1, így A_1C_1 és B_1D_1 a négyzet oldalfelezői. Legyen P vetülete ezekre P_1, ill. P_2, ekkor PP_1 párhuzamos AB-vel és CD-vel, ezért az MAB, MCD síkokkal is, tehát P_1 ugyanakkora távolságban van e síkoktól, mint maga P. E két távolságot az MA_1C_1 síkban mérjük, összegük az idézett tétel szerint egyenlő az MA_1C_1 háromszög A_1-ből húzott magasságával.

Hasonlóan P-nek az MAD és MBC síkoktól vett távolságainak összege annyi, mint P_2-nek e síkoktól, más szóval az MD_1, MB_1 egyenesektől mért távolságainak összege, ez pedig az MB_1D_1 háromszög D_1-ből húzott magasságával egyenlő. A gúla szabályos volta miatt MA_1C_1 és MB_1D_1 közös magasságú egyenlő szárú háromszögek, egybevágók, így a két összeg egyenlő.

Megjegyzések. **1.** A feladat megoldása óta már minden megoldó megismerte a szögfüggvények fogalmát, ezt felhasználva gépiesebben bizonyíthatjuk az állítást. A gúla mindegyik oldallapja ugyanakkora α hegyesszöggel hajlik az alaphoz. Legyen P vetülete a BC élen P^*, az AD-n P^{**}, ekkor

$$\begin{aligned} PT_1 + PT_2 = PP^* \sin\alpha + PP^{**} \sin\alpha = (PP^* + PP^{**}) \sin\alpha = \\ = P^*P^{**} \sin\alpha = AB \sin\alpha. \end{aligned}$$

2. Az állítás az alapsíknak a négyzet kerületén kívül levő P pontjaira is érvényes lesz akkor, ha az ilyen pontok és a gúla oldallapjai közti távolságnak előjelet tulajdonítunk: pozitívnak vesszük a távolságot, ha P az oldallapsíknak ugyanazon az oldalán van, mint maga a gúla, és negatívnak, ha P-t a sík másik oldalán választjuk meg.

3. Az állítás – és legutóbbi kiterjesztése is – érvényes minden szabályos, $2n$ oldalú gúla esetében, az MA_iA_{i+1} és $MA_{n+i}A_{n+i+1}$ oldallapokat véve egy párnak, ahol A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n} az alapsokszög egymás utáni csúcsai, $i = 1, 2, \ldots, n$ és A_{2n+1}-et azonosnak tekintjük A_1-gyel.