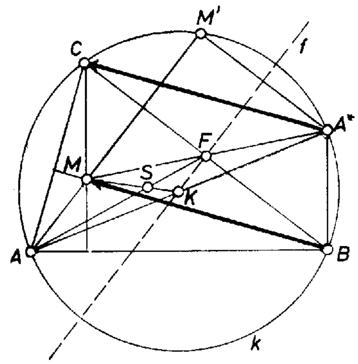
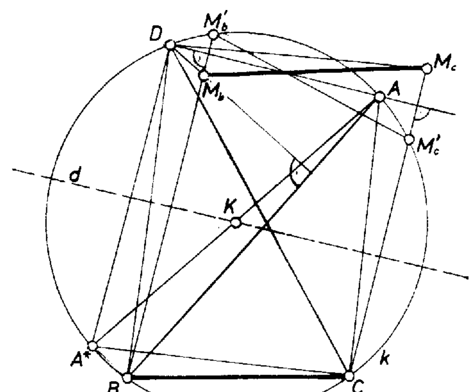
I. megoldás. Tükrözzük az ABC háromszög B és C csúcsán átmenő magasságvonalait a BC oldal F felezőpontjára (1. ábra).



1. ábra

A kapott egyenesek metszéspontja az ABC háromszög M magasságpontjának F-re vonatkozó tükörképe, jelöljük ezt a pontot A^*-gal. Mivel A^* az AB egyenesre B-ben, és az AC egyenesre C-ben emelt merőlegesek metszéspontja, azért a B és C pontok rajta vannak az AA^* szakasz feletti k Thalész-körön, vagyis k az ABC háromszög köré írható kör, és A^* az A pont k-beli átellenes pontja. Az F-re való tükrözés a $\overrightarrow{BM}$ vektort a $\overrightarrow{CA^*}$ vektorba viszi át, így ezek a vektorok egymás (-1)-szeresei, tehát $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{A^*C}$.

Legyen D a k kör tetszőleges, az A, B, C pontoktól különböző pontja (2. ábra).



2. ábra

Alkalmazzuk eredményüket az ADB háromszög M_b magasságpontjára: $\overrightarrow{BM_b}=\overrightarrow{A^*D}$, és az ADC háromszög M_c, magasságpontjára: $\overrightarrow{CM_c}=\overrightarrow{A^*D}$. Így $\overrightarrow{BM_b}=\overrightarrow{CM_c}=\overrightarrow{A^*D}$, eszerint az M_bM_c, szakasz a BC szakasznak az $\overrightarrow{A^*D}$ vektorral való eltolásból ered, tehát az M_bM_c egyenes párhuzamos BC-vel.

Az M_bM_c, egyenes mindig határozott, hiszen M_b és M_c, távolsága egyenlő B és C távolságával.

Nem használtuk fel, hogy D a körülírt kör BC-re merőleges átmérőjének végpontja, eszerint az állítás k minden pontjára érvényes, kivéve az ABC háromszög csúcsait (hiszen úgy az ADB, ADC háromszögek közül legalább az egyik nem lenne valóságos háromszög). Ha D az A-val átellenes A^* pont, akkor az ADB háromszögben B-nél, az ADC háromszögben C-nél derékszög van, M_b azonos B-vel, M_c azonos C-vel (az A^*D eltolási vektor 0 vektor).

Hasenfratz Anna (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. A fenti megoldás szerint

$$\overrightarrow{MA^*}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},$$

így az AA^* szakasz K felezőpontjára (1. ábra)

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA^*}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).$$

Mivel AA^* az ABC háromszög köré írható kör átmérője, azért K a k középpontja.

Ismeretes másrészt, hogy a háromszög S súlypontjára

$$\overrightarrow{MS}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$$

teljesül (ahol M helyébe a sík tetszőleges pontját írhatnánk), tehát

$$\overrightarrow{MS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MK},$$

vagyis S a KM szakasz K-hoz közelebbi harmadolópontja. Ez *Euler* tétele. Feladatunk állítása ennek a tételnek a segítségével is bizonyítható (ismét k tetszőleges D pontjára): legyen S_b és S_c rendre az ADB, ADC háromszög súlypontja, Euler tétele alapján könnyen látható, hogy $S_bS_c||M_bM_c$, az viszont közvetlenül bizonyítható, hogy $S_bS_c||BC$.

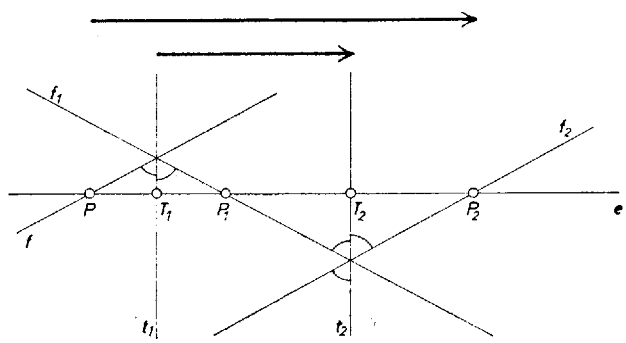
Rózsás László (Nagykőrös, Arany J. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az előző megoldásban beláttuk, hogy az ABC háromszög M magasságpontjának a BC oldal F felezőpontjára vonatkozó tükörképe azonos az ABC köré írható k kör A-n átmenő átmérőjének másik végpontjával, A^*-gal. Ebből következik, hogy M-nek BC-re vonatkozó M' tükörképe is rajta van k-n (1. ábra). Valóban, ha M'-t tükrözzük a BC szakasz f felező merőlegesére, M-nek F-re (a két tükrözési tengely metszéspontjára) vonatkozó A^* tükörképét kapjuk, tehát M' és A^* tükrösek a k kör f átmérőjére, így M' is rajta van k-n.

Eszerint az ADB, ADC háromszögek M_b, M_c magasságpontjainak AD-re vonatkozó M_b', M_c' tükörképei is rajta vannak k-n (2. ábra).

Így BM_b' is, CM_c' is merőleges AD-re – hiszen pl. BM_b is, M_bM_b' is merőleges rá – , ezért BM_b' és CM_c' egy, a k-ba beírt húrtrapéz alapjai, tehát ennek $M_b'M_c'$ szára (esetleg átlója) a BC szárnak tükörképe a kör BM_b'-re merőleges – tehát AD-vel párhuzamos – d átmérőjére. Eszerint M_bM_c úgy áll elő BC-ből, hogy ezt előbb d-re, majd a képét AD-re tükrözzük. Ámde két, egymással párhuzamos tengelyen való tükrözés eredménye előáll egyetlen eltolással, amely merőleges a két tengelyre és vektora 2-szer akkora, mint az első tengelyt a második tengelybe vivő eltolás. Így tehát $M_bM_c\#BC$, ezt kellett bizonyítanunk.

Bebizonyítjuk a felhasznált állítást. Legyen a két párhuzamos tengely t_1 és t_2, továbbá P képe t_1- re P_1, és P_1 képe t_2,-re P_2 (3. ábra).



3. ábra

Ekkor a $PP_1 = e$ egyenes merőleges t_1-re és átmegy P_2-n, mert P_1P_2 merőleges t_2-re, tehát t_1-re is. Legyen e metszésponkja t_1-gyel T_1, t_2-vel T_2. Ekkor P_2 úgy is előáll, hogy P-t előbb T_1-re tükrözzük, a kép nyilvánvalóan P_1, és ugyanígy P_1 képe T_2-re P_2. Tudjuk viszont,[1] hogy két pontra egymás után való tükrözés helyettesíthető kétszer akkora eltolással, mint amekkora az első pontot (T_1-et) a másodikba (T_2-be) viszi át. Az pedig már nyilvánvaló, hogy t_1-et t_2-be – mindkettőre merőlegesen – ugyanakkora eltolás viszi át, mint T_1-et T_2-be. (Az ábra bemutatja egy, a P-n átmenő és a t_1-et metsző f egyenes f_1, majd f_2 képét is, $f_2||f$, és f bármely pontját $2\,T_1T_2$ eltolás viszi át f_2 megfelelő pontjába.

Ez a bizonyítás is érvényes D-ként k-nak bármely pontjára.

*Megjegyzés.*Bár több érdekes megoldás érkezett annak a föltevésnek a felhasználásával is, amit D helyzetére az eredeti kitűzés tartalmazott, ilyet mégsem közlünk, mert egy ilyen megoldás, a speciális helyzet kihasználásával, csak bonyolultabb lehet, mint anélkül.

[1]Lásd: *Horvay Katalin-Pálmay Lóránt:* Matematika a gimnázium I. osztálya számára. 4. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest, 1969. 323. oldal.