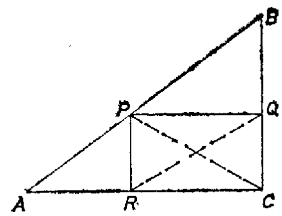
I. megoldás. 1. Húzzunk párhuzamost P-n át a CA befogóval és jelöljük a párhuzamosnak CB-vel való metszéspontját Q-val, és a P-n át CB-vel párhuzamosan húzott egyenes CA-val való metszéspontját R-rel (1. ábra).



1. ábra

A kapott APR és PBQ háromszögek mindegyike hasonló az ABC háromszöghöz, ezért

$$\frac{PA}{PR}=\frac{BA}{BC}, \qquad \text{illetőleg} \quad \frac{PB}{QP}=\frac{AB}{CA}, \quad \text{tehát}$$
$$PA\cdot BC=PR\cdot BA, \qquad \text{ill.} \quad PB\cdot CA=QP\cdot AB.$$

Ezek behelyettesítésével az álltás bal oldala így alakul:

$$PR^2\cdot BA^2+QP^2\cdot AB^2=(PR^2+PQ^2)AB^2.$$

Ámde szerkesztésünk folytán a $PQCR$ négyszög téglalap, így a zárójelben a $QR^2=PC^2$ áll, és ezt beírva átalakításunk eredménye $PC^2\cdot AB^2=(PC\cdot AB)^2$ .Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

2. A bizonyításban a P pontnak az AB egyenesen elfoglalt helyzetéről nem használtunk fel semmit, csupán azt, hogy az APR és a PBQ háromszögek, valamint a $PQCR$ téglalap mindegyike létrejött. Eszerint bizonyításunk záró következtetése csak akkor nem érvényes, ha P egybeesik A-val vagy B-vel. Maga az állítás azonban ekkor is érvényes, de semmitmondó. Pl. ha P egybeesik A-val, akkor $PA=0$, $PB=AB$ és $PC=AC$, és mindkét oldalon $(AB\cdot CA)^2$ áll.

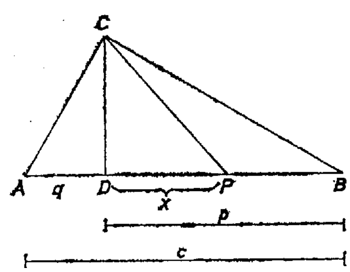
Az állítás tehát érvényes akkor is, ha P az AB tetszőleges pontja.

Zichó Dávid (Tatabánya, Árpád Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel először, hogy P azonos a C pont AB-n levő D vetületével. Ekkor a szokásos $AB=c$, $AD=q$, $BD=p$ jelölésekkel, és az $AC^2=qc$, $BC^2=pc$, $CD^2=pq$ összefüggések alapján feladatunk állítása a

$$q^2pc+p^2qc=pqc^2$$

összefüggést jelenti, ami valóban igaz, mert a bal oldal $pqc(p+q)=pqc^2$.



2. ábra

Ha P a DB félegyenes tetszőleges pontja (2. ábra), akkor a $DP=x$ jelöléssel, a már használt összefüggések és $PC^2=CD^2+DP^2=pq+x^2$ szerint (1) a következő alakú:

$$(q+x)^2\cdot pc+(p-x)^2\cdot qc=(pq+x^2)c^2.$$

Ebből a műveletek elvégzése és rendezés után a

$$(q^2pc+p^2qc-pqc^2)=x^2(c^2-pc-qc)$$

összefüggést kapjuk, ami valóban igaz minden x-re, hiszen a bal oldalon a már bizonyított $P\equiv D$ esetre vonatkozó állítás szerint 0 áll, a jobb oldal értéke pedig $c=p+q$ miatt 0.

Hasonlóan bizonyítható (1), ha P a DA félegyenes tetszőleges pontja, tehát (1) az AB egyenes tetszőleges P pontjára érvényes.

Megjegyzés. Adjuk hozzá (1) két oldalához a

$$PA \cdot PB(BC^2 + CA^2) = PA \cdot PB \cdot AB^2$$

egyenlőséget. Rendezés után a

$$(PA + PB)PA \cdot BC^2 + (PA + PB)PB \cdot CA^2 = (PC^2 + PA \cdot PB)AB^2$$

összefüggést kapjuk. Itt $PA + PB = AB$ miatt egyszerűsíthetünk AB-vel, és a

$$PA \cdot BC^2 + PB \cdot CA^2 = (PC^2 + PA \cdot PB)AB$$

összefüggést kapjuk. Ez tetszőleges ABC háromszögre érvényes, ha P az AB szakasz belső pontja (*Stewart* tétele).