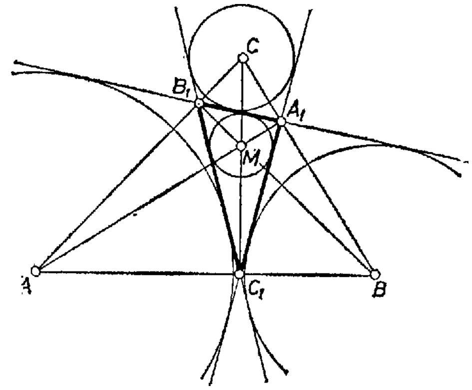
Jelöljük az $ABC = H$ háromszög magasságpontját M-mel, az AB_1C_1, a BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszög adott magasságpontját pedig rendre A_2-vel, B_2-vel, C_2-vel.

1. Ha H-ban a C csúcsot M-re cseréljük, az új, ABM háromszög talpponti háromszöge ismét $A_1B_1C_1$ lesz, hiszen M-nek és C-nek AB-n levő vetülete azonos, és $AB_1 \perp BM$, $BA_1 \perp AM$ alapján az A és B csúcsoknak a szemközti oldalon levő vetülete B_1, illetve A_1 lesz. (1. ábra).



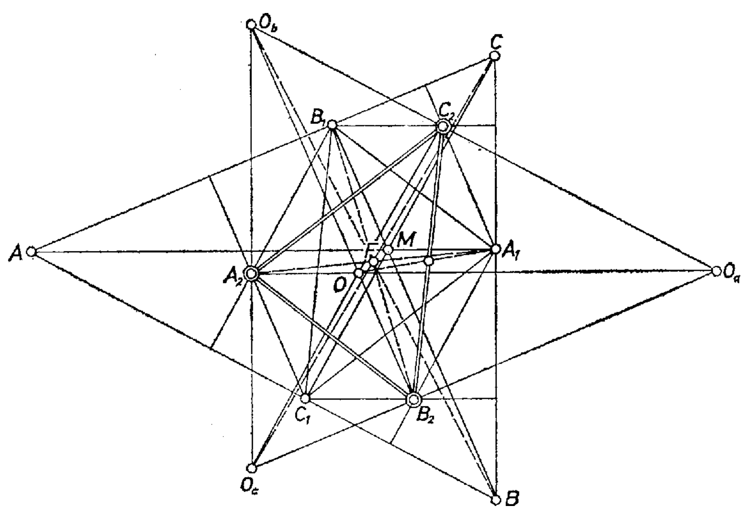
1. ábra

A mondottakból az is következik, hogy az ABM háromszög magasságpontja C. Kivétel csak az az eset, ha H-ban A-nál vagy B-nél derékszög van, hiszen ekkor az A, B, M pontok nem határoznak meg háromszöget. Ha viszont H nem derékszögű, akkor az A, B, C, M pontok különbözők, és bárhogy választunk ki e négy pont közül hármat, az ezek által alkotott háromszög magasságpontja a negyedik, és e háromszög talpponti háromszögének a helyzete nem függ attól, melyik három pontot választottuk az A, B, C, M közül. (A 3 talppont szerepe azonban cserélődik.) Ha H hegyesszögű, akkor az ABM, BCM, CAM háromszögekben M-nél tompaszög van – pl. $AMB\sphericalangle = 180^\circ - ACB\sphericalangle$ –, ha pedig H-ban valamelyik csúcsnál tompaszög van, akkor azt M-re cserélve hegyesszögű háromszöget kapunk.

Ha H hegyesszögű háromszög, akkor magasságvonalai az $A_1B_1C_1 = H_1$ talpponti háromszögben szögfelező egyenesek, hiszen a kerületi szögek és a merőleges szárú szögek tételei alapján például A_1-ben: $AA_1C_1\sphericalangle = ACC_1\sphericalangle = ABB_1\sphericalangle = = AA_1B_1\sphericalangle$; ennélfogva H oldalai pedig H_1-nek külső szögfelezői. Ha H-ban – mondjuk C-nél – tompaszög van, akkor az ABM háromszög hegyesszögű, tehát ennek a magasságvonalai lesznek H_1 belső szögfelelezői, vagyis H_1-re nézve az AC, BC oldal belső, az AB pedig külső szögfelező. Ezek szerint ha H nem derékszögű, akkor az A_1, B_1, C_1, M pontok különbözők, nincs köztük három egy egyenesen levő pont, és M a H_1 háromszög oldalegyeneseit érintő valamelyik kör középpontja, H csúcsai pedig a másik három érintőkör középpontjai.

2. Az AB_1C_1 háromszög A-ban összefutó oldalai a H-ban is oldalak, ezért A_2 magasságpontja a B_1-en át CC_1-gyel, C_1-en át BB_1-gyel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja, tehát B_1A_2 párhuzamos és egyenlő MC_1-gyel, ugyanígy $C_1A_2 \# MB_1$, másképpen mondva: az $\overrightarrow{MA}_2$ vektor az $\overrightarrow{MB}_1$, MC_1 vektorok összege (2. ábra):

$$\overrightarrow{MA}_2 = \overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MC}_1.$$



2. ábra

Hasonlóan

$$\overrightarrow{MB}_2 = \overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MC}_1, \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{MC}_2 = \overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MB}_1.$$

Mérjük fel M-ból kiindulva az $\left(\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MC}_1\right)$ vektort, legyen a végpontja O, az MO szakasz felezőpontja pedig F. Ekkor

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MC}_1\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MA}_2\right),$$

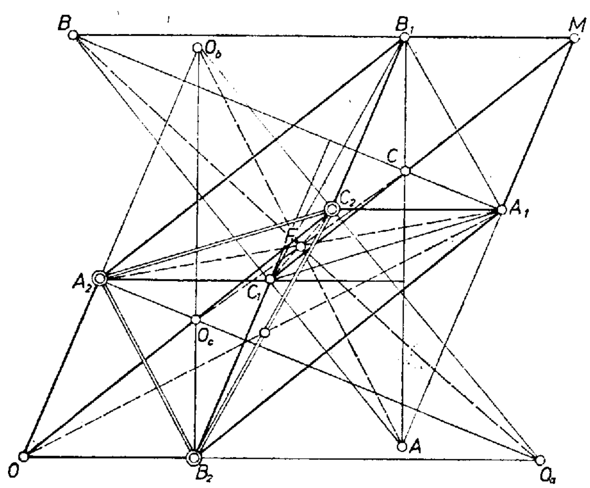
tehát F az A_1A_2 szakasz felezőpontja, és hasonlóan mutatható meg, hogy F a B_1B_2, C_1C_2 szakaszokat is felezi.

Ezek szerint az $A_2B_2C_2 = H_2$ háromszög az F pontra vonatkozó tükörképe a H_1-nek, és O az M tükörképe. Ezek alapján O a H_2 oldalegyeneseit érintő 4 kör valamelyikének a középpontja, H csúcsainak az F-re vonatkozó tükörképe pedig H_2 további három érintőkörének a középpontja. A centrális szimmetriából az is következik, hogy F a H_2 háromszögből ugyanúgy állítható elő, mint H_1-ből:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OB}_2 + \overrightarrow{OC}_2\right).$$

3. Ezek szerint ha az A_2, B_2, C_2 pontok különbözők (és nincsenek egy egyenesen), akkor a szerkesztés menete a következő. Megrajzoljuk az $A_2B_2C_2$ háromszög belső és külső szögfelezőit, a kapott négy metszéspont közül egyiket O-nak választjuk, a másik három közül az OA_2, OB_2, OC_2 egyeneseken levőt pedig rendre O_a-val, O_b-vel, O_c-vel jelöljük. Majd tükrözzük O-t a B_2C_2 szakasz felezőpontjára, kapjuk az A_1 pontot; az A_1A_2 szakaszt megfelezzük, kapjuk az F pontot. Végül az $O_aO_bO_c$ háromszöget F-re tükrözve kapjuk a keresett ABC háromszöget.

4. Ezzel az eljárással négy különböző, a követelményeknek megfelelő háromszöget kapunk. (A 2. és 3. ábrán ezek közül egyet–egyet rajzoltunk meg.)[1]



3. ábra

Valóban, a szerkesztés szerint az $O_aO_bO_c$ háromszög talpponti háromszöge $A_2B_2C_2$, magasságpontja O, és

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_1\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OB}_2 + \overrightarrow{OC}_2\right).$$

Legyen a B_2, C_2, O pontok F-re vonatkozó tükörképe B_1, C_1, M, akkor a tükrözés alapján az ABC háromszög magasságpontja M, és talpponti háromszöge $A_1B_1C_1$, továbbá

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MB}_1 + \overrightarrow{MC}_1\right).$$

Ebből pedig a 2. pontban mondottak szerint következik, hogy az AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 háromszögek magasságpontja rendre az adott A_2, B_2, C_2 pont.

5. Ha tehát az eredeti H háromszög nem derékszögű, az adott három magasságpont mindig valódi H_2 háromszöget határoz meg, és egy valódi (nem elfajult) H_2 háromszögből négy különböző H háromszöget állíthatunk vissza. (Az „eredeti” H háromszöget csak akkor tudnánk egyértelműen rekonstruálni, ha azt is tudnánk róla, hogy van-e tompaszöge, és ha van, melyik csúcsánál van az. Ehhez hozzáértjük, hogy az adott három pont meg van betűzve, azaz szerepük előre meg van határozva.)

6. Ha H-ban – mondjuk a C csúcsnál – derékszög van, akkor az A_1, B_1, M pontok azonosak C-vel, tehát az A_1B_1C háromszög három csúcsa azonos. Így a C_2 magasságpont nem értelmezhető, H_2 nem jön létre. Az adott magasságpontokból eszerint csak akkor szerkeszthetünk megfelelő háromszöget, ha azok valódi háromszöget határoznak meg.

[1] A két ábrán az A_2, B_2, C_2 ponthármas egybevágó, csak az ábrák takarékos beállítása érdekében máshoz képest el vannak fordítva.

(Akkor sem mondhatunk mást, ha $C \equiv A_1 \equiv B_1$ esetén C_2-t C-vel azonosnak definiáljuk. Ekkor ugyan megengedhető, hogy H_2 két csúcsa – mondjuk A_2 és B_2 – azonos legyen, de ekkor végtelen sok megfelelő H háromszög van, ezek egyik csúcsa a C_2-vel azonos C, a másik kettőt pedig egy tetszőleges, a C_2-n átmenő merőleges egyenespár metszheti ki az A_2C_2-re A_2-ben emelt merőleges egyenesből.)