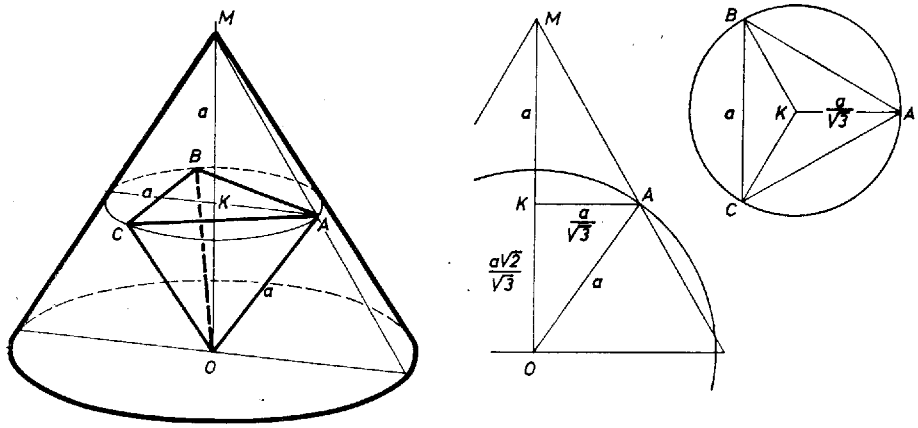
Jelöljük a kúp csúcsát M-mel, alapkörének a középpontját O-val, a keresett tetraéder további csúcsait A-val, B-vel, C-vel, az ABC lap középpontját K-val és a tetraéder élének hosszát a-val. Mivel az A, B, C csúcsok O-tól a távolságra vannak, ezek a csúcsok rajta vannak az O középpontú, a sugarú gömbön. Ha az OM tengelyen átmenő tetszőleges síkkal metsszük a kúpot és a gömböt, a metszet egy szabályos háromszög, illetve egy a sugarú kör lesz. Ez a kör a háromszög M-en átmenő oldalát két pontban metszi, ha $a \le \frac{1}{2}$ $\left(\text{és természetesen } a \ge \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, egy pontban metszi, ha $\frac{1}{2} < a \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, és nem metszi, ha $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát ha $\frac{\sqrt{3}}{4} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, akkor a gömb a kúp palástját egy vagy két körben metszi. Nem lehet másrészt $a > \frac{1}{2}$, mert akkor a metszetkör átmérője kisebb volna a-nál, tehát nem tudnánk rajta elhelyezni három, egymástól páronként a távolságra levő pontot.



1. ábra

Ezek szerint $\frac{\sqrt{3}}{4} \le a \le \frac{1}{2}$, és az a sugarú gömb két körvonalban metszi a kúp palástját, amelyek síkja párhuzamos az alapsíkkal. Mivel a feladat nem kéri az összes megoldás megkeresését, célszerű a legegyszerűbb elrendezésben meghatározni a-t, amikor az A, B, C csúcsok ugyanazon a körvonalon vannak. Ekkor ez a kör az a oldalú szabályos ABC háromszög köré írható kör, tehát a sugara $a/\sqrt{3}$ (1. ábra).

A K középpont rajta van az OM tengelyen, az AKO derékszögű háromszögben

$$KO^2 = AO^2 - AK^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}\,a^2.$$

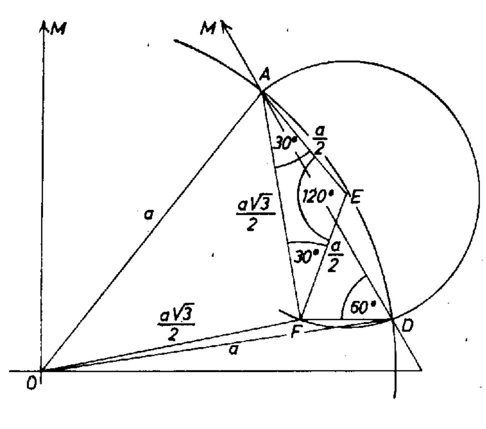
Másrészt, mivel AK párhuzamos az alappal, a $KM : AK$ arány értéke $\sqrt{3}$, tehát $MK = \sqrt{3}\,AK = a$. Így a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ hosszú MO szakasz MK, KO darabjait kifejeztük a-val, amiből a meghatározható:

$$a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$a = \frac{3\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = 0{,}4768.$$

Megjegyzések. 1. Megvizsgáljuk azokat az elrendezéseket is, amelyekben az A, B, C csúcsok közül kettő az egyik metszet–körvonalon, egy a másikon van.

I. Tegyük fel először, hogy a két csúcsot tartalmazó körvonal sugara nagyobb, és legyenek ezen a körvonalon a B és C csúcsok. A BC él felezőpontját jelöljük F-fel, a B-n és C-n átmenő körnek az MA alkotón levő pontját D-vel (F az AMO síkban van, 2. ábra).



2. ábra

Az AFO háromszög egyenlő szárú, alapja a, szárai $a\sqrt{3}/2$ hosszúak (lapbeli magasság). Mivel DF párhuzamos a kúp alapjával, D-ből az AF szakasz 60°-os szög alatt látszik, tehát D rajta van az AF feletti 60°-os látókörön, és az AF egyenes O-t nem tartalmazó oldalán van. Ennek a körnek az E középpontja az A, F pontoktól $a/2$ távolságra van, amiből az EO távolság meghatározható. A cosinustétel alapján az AEO háromszögben

$$EO^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} - a^2 \cos EAO\sphericalangle = a^2 \left\{ \frac{5}{4} - \cos(FAO\sphericalangle + 30^\circ) \right\} =$$

$$= a^2 \left\{ \frac{5}{4} - \cos FAO\sphericalangle \cdot \cos 30^\circ + \sin FAO\sphericalangle \cdot \sin 30^\circ \right\} = a^2 \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \right\} = \frac{9+2\sqrt{6}}{12}\, a^2.$$

Az egyenlő szárú ADO háromszög szárai a hosszúságúak, az AD alaphoz tartozó m magasság hossza

$$m = a \cos AOE\sphericalangle = a\, \frac{AO^2 + EO^2 - AE^2}{2AO \cdot EO} = a\, \frac{\frac{3}{4} + \lambda^2}{2\lambda},$$

ahol

$$\lambda = \sqrt{\frac{9+2\sqrt{6}}{12}}.$$

Az egységnyi oldalú szabályos háromszögben az alap O felezőpontjának a másik két oldaltól való távolsága $m = \frac{\sqrt{3}}{4}$, tehát

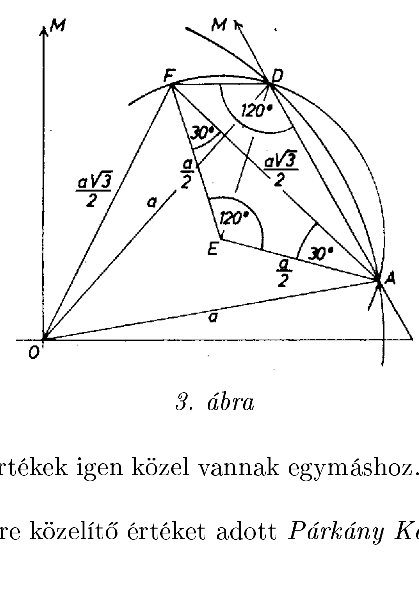
$$a = \frac{2\sqrt{3}\lambda}{3+4\lambda^2} = \sqrt{\frac{9+2\sqrt{6}}{\left[3 + \frac{1}{3}(9+2\sqrt{6})\right]^2}} = \sqrt{\frac{81+18\sqrt{6}}{(18+2\sqrt{6})^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{567+12\sqrt{6}}}{50} = 0{,}4884.$$

II. Ha pedig A van a nagyobbik körön és B, C a kisebbiken, akkor az ADF szög 120°-os, E az AD egyenes O-t tartalmazó oldalán van (3. ábra) és a fentihez hasonló számolással kapjuk, hogy

$$EO^2 = \frac{9-2\sqrt{6}}{12}\, a^2$$

$$a = \frac{\sqrt{567-12\sqrt{6}}}{50} = 0{,}4637.$$



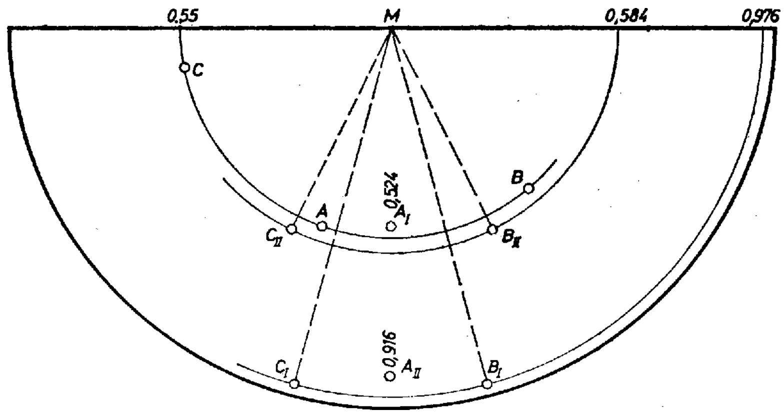
3. ábra

A három elrendezésnél a-ra kapott értékek igen közel vannak egymáshoz. Jobb áttekintés érdekében a 2. és 3. ábra nem mérethű.

A ferdén behelyezett tetraéderek élére közelítő értéket adott *Párkány Katalin* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o.t.), +2 pontot kapott.

2. A beírt tetraéderek A, B, C csúcsai a kúp kiterített palástján könnyen megszerkeszthetők, felhasználva a fent kapott méreteket és hogy a kúp alkotója éppen 2-szer akkora, mint az alapkör sugara. Így ugyanis a palást kiterítése félkörlemez, a kúpnak az alappal párhuzamos síkban levő körei a kiterítésben kétszer akkora sugarú félkörök, és minden ilyen kör bármely ívéhez a kiterítésben feleakkora középponti szög tartozik, mint az eredetiben.

A ferde tengellyel beírt tetraéder I. esetében az OMA, ill. OMB háromszögből a cosinustétellel $MA_1 = (18 - 2\sqrt{6})/25$, $MB_1 = MC_1 = (39 + 4\sqrt{6})/50$, és a B, C pontokat tartalmazó körmetszet sugara $r_1 = (39 + 4\sqrt{6})/100$, e körben az a hosszúságú B_1C_1 húrnak a K_1 középponttól való távolsága $d_1 = (6 + \sqrt{6})/20$, és a $B_1K_1C_1 = 2\varphi$ szögre $\cos\varphi = d_1/r_1 = (14+\sqrt{6})/19$, tehát MA_1, MB_1, $\cos\varphi$ megszerkeszthetők ($\varphi = 30°2'$) és a kiterítésben $B_1MC_1 \sphericalangle = \varphi$ és A_1 rajta van B_1C_1 felező merőlegesén (4. ábra).



4. ábra

Hasonlóan adódik a II. esetben B_{II}, C_{II}, A_{II} kölcsönös helyzete.