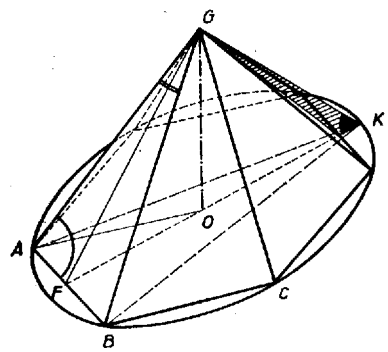
Szükségünk van a gúla alapélének és oldalélének arányára. Legyen a gúla hatélű csúcsa G, egy alapéle AB, a GAB lapra G-ben állított merőlegesnek az alapsíkon levő metszéspontja K, továbbá G-nek az alapsíkon levő vetülete O. A gúla szabályossága folytán alaplapja szabályos hatszög és O ennek a középpontja. A GO tengely körüli $60°$-os elfordítás a gúla mindegyik lapját a következő lapba viszi át, ezért a szerkesztett merőlegeseket is sorba egymásba, az új hatszöget is önmagába, így O annak is középpontja. A két hatszög egybevágósága alapján $OK = OA$ (1. ábra).

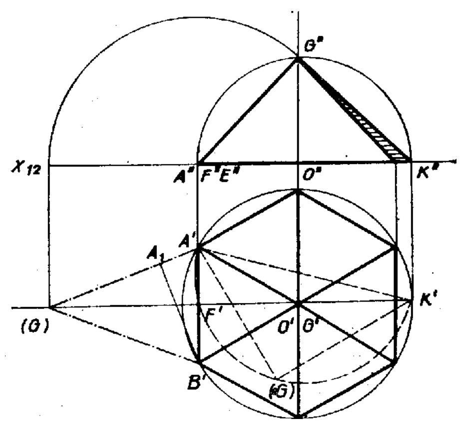


1. ábra

Legyen még az AB él felezőpontja F, ekkor az $S = GOF$ sík az AB él felező merőleges síkja. S-en K is rajta van, mert $GA = GB$ és $KGA\sphericalangle = KGB\sphericalangle = 90°$ alapján a KGA és KGB háromszögek egybevágók, tehát KA, KB átfogóik egyenlők. És mivel GK a GAB oldallap GF egyenesére is merőleges, azért GKF derékszögű háromszög (2. ábra), és így

$$\operatorname{tg} GAB\sphericalangle = \frac{GF}{AF} = \frac{2\sqrt{FO\cdot FK}}{AB} = \frac{2\sqrt{FO(FO+OA)}}{OA} =$$
$$= 2\sqrt{\frac{FO}{OA}\left(\frac{FO}{OA}+1\right)} = \sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} = 2{,}542,$$

$GAB\sphericalangle = 68°32'$, és ebből $AGB\sphericalangle = 42°56'$, hiszen, mint ismeretes, $FO/OA = \sqrt{3}/2$.



2. ábra

A 2. ábra két vetületben mutatja a testet, továbbá ABG lapját és AGK metszetét az alapsíkba forgatva.

Komornik Vilmos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)
Jeney Edit (Elek, Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések, 1. Lényegében ugyanígy

$$\sin GAB\sphericalangle = \frac{GF}{GA} = \frac{GF}{GK} = \sqrt{\frac{FO\cdot FK}{KO\cdot KF}} = \sqrt{\frac{FO}{KO}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

2. Számíthatunk abból is, hogy AKG egyenlő szárú derékszögű háromszög, és átfogója az AKF háromszögben is átfogó, a befogók pedig ismertek.

3. Gúlánkon az oldalélek és az alaplap közti szög egyenlő az oldalélek közti szöggel. Valóban, az oldallap területének kétféle kifejezése alapján, majd az FKG derékszögű háromszögből:

$$\sin AGB\sphericalangle = \frac{AA'}{AG} = \frac{BG\cdot AA'}{AG^2} = \frac{AB\cdot FG}{KG^2} = \frac{KO\cdot FG}{KO\cdot KF} = \frac{FG}{KF} = \sin FKG\sphericalangle.$$

Vigassy Lajos