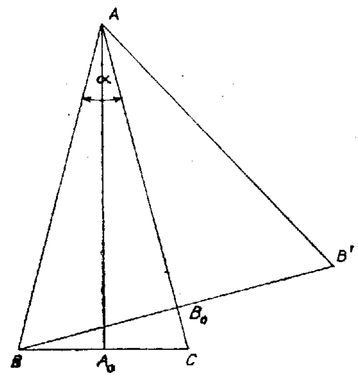
Az állítások igaz, ill. hamis voltára vonatkozó közlést csak úgy tudjuk felhasználni, ha egyenként sorra vesszük az igaz állítások párjaira lehetséges eseteket.

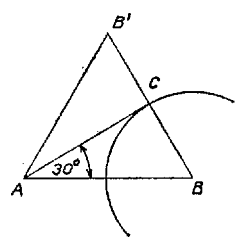
1. Próbáljuk fölvenni, hogy III. és IV. igazak. Ekkor $AB = AC = 2BC = 2$, a háromszög egyenlő szárú, így sem az alapján, nincs derékszög, sem a szárai közt, hiszen $BC < AB$ alapján $\alpha = BAC\sphericalangle < ACB\sphericalangle < 90°$; eszerint I. hamis (1. ábra).



1. ábra

Továbbá a háromszög tengelymagassága $AA_0 = \sqrt{15}/2$, a szárakra merőleges magasságok fele ekkorák, hiszen két magasság aránya bármely háromszögben a megfelelő oldalak arányának reciprokával egyenlő, így $\sin\alpha = \sqrt{15}/8 \neq 1/2 = \sin 30°$, tehát $\alpha \neq 30°$, II. is hamis. (Másképpen így mondhatjuk ezt: $BB_0 = \sqrt{15}/4$, így $BB' = \sqrt{15}/2 < 2 = AB = AB'$ – ahol B' a B-nek AC-re való tükörképe, ezért $BAB'\sphericalangle < ABB'\sphericalangle = AB'B\sphericalangle$, így $BAB'\sphericalangle < 60°, BAC\sphericalangle < 30°$.) Így a hamis állítások száma 2, amint a feladat állítja, találtunk egy megfelelő ABC háromszöget, és ennek kerülete 5 egység.

2. Ha a III.-at és a II.-at próbáljuk igaznak venni, akkor a háromszöget megszerkeszthetjük. Egy A csúcsú $30°$-os szög egyik szárára $AB = 2$ egységet mérünk fel, majd B körül $BC = 1$ sugárral kört írunk, ekkor C csak az ív és a másik szár közös pontja lehet (2. ábra).

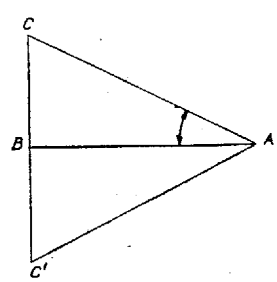


2. ábra

Megmutatjuk, hogy csak egy közös pontjuk van, vagyis érintkeznek, így pedig a BCA szög derékszög, I. igaz, a közléssel ellentétben, tehát ez a háromszög nem felel meg. Valóban, a másik szár és a kör közös pontja rajta van a körnek a másik szárra vonatkozó tükörképén is, a B' körüli, 1 sugarú körön, ahol $B'AB\sphericalangle = 2 \cdot 30°$ és $B'A = BA = 2$. Így pedig $B'AB$ szabályos háromszög, $BB' = 2$, a két kör éppen érinti egymást és az AC egyenest, amint állítottuk.

3. Ugyanígy nem felel meg az ABC háromszög, ha a IV.-et és a II.-t vesszük igaznak, hiszen ez az eset B és C cseréjével az előbbibe megy át, így B-nél volna derékszög.

4. III. állítás mellé az I.-t véve igaznak, az ABC háromszög megfelel, ha a derékszög csúcsának B-t vesszük (3. ábra).



3. ábra

Így ugyanis $AC=\sqrt{BC^2+BA^2}=\sqrt{5}\neq 2$, tehát IV. hamis; másrészt

$$\operatorname{tg} BAC\sphericalangle=\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg} 30^\circ, \qquad A\sphericalangle<30^\circ,$$

vagyis II. is hamis, ugyanis a tangensfüggvény a 0°, 90° intervallumban minden értéket, amit fölvesz, csak egy helyen vesz föl. (Mondhatjuk így is: $BAC\sphericalangle<30^\circ$, mert C-nek BA-ra vonatkozó tükörképét C'-vel jelölve, az ACC' háromszögben $AC=AC'>CC'$, emiatt $CAC'\sphericalangle<ACC'\sphericalangle=AC'C\sphericalangle$, és így $CAC'\sphericalangle<60^\circ$, $CAB\sphericalangle<30^\circ$.) A talált háromszög kerülete $3+\sqrt{5}$ egység.

Ha viszont (tovább is III. és I. igaz volta esetében) C-t vesszük a derékszög csúcsának, a föntiekhez hasonlóan látható, hogy $BAC\sphericalangle=30^\circ$, II. is igaz, tehát a háromszög nem felel meg. – Végül nem kell próbálnunk A-ba tenni derékszöget, hiszen $BC<AB$ alapján $BAC\sphericalangle<ACB\sphericalangle$, és így $BAC\sphericalangle<90^\circ$.

5. Lényegében a legutóbbi esetre jutunk, ha a IV.-et és az I.-t vesszük igaznak, csupán B-t és C-t kell fölcserélnünk: ha $ACB\sphericalangle=90^\circ$ és $AC=2BC$, akkor $A\sphericalangle<30^\circ$ és $AB=\sqrt{5}$, II. és III. hamis, a kerület $3+\sqrt{5}$.

6. Végül olyan ABC háromszög sem felelhet meg, melyben II. és I. igaz: $BAC\sphericalangle=30^\circ$ és vagy B-nél vagy C-nél derékszög van, mert ekkor igaz IV., ill. III. is. Más lehetőség nincs a két igaz állítás megválasztására.

Mindezek szerint az I.–IV. állítások és a „2 igaz, 2 hamis” közlés alapján megfelelő háromszög kerülete lehet 5 és lehet $3+\sqrt{5}$ egységnyi.

Kósa Zsuzsanna (Budapest, Móricz Zs. Gimn., I. o. t.)