I. megoldás. I. Legyenek a kívánt N szám számjegyei rendre $j_0, j_1, j_2, \ldots, j_9$, eszerint a k számjegy j_k-szor fordul elő. Másféle jegye nem lehet (a tízes számrendszerben felírt) számnak, így a jegyek együttes száma egyrészt annyi, mint a számjegyek összege, másrészt az előírás szerint tíz, tehát

$$j_0 + j_1 + \ldots + j_9 = s = 10.$$

Megmutatjuk, hogy nem léphet föl N-ben sem 7-es, sem ennél nagyobb jegy. Föltéve ugyanis, hogy van ilyen – jelöljük h-val, vagyis $h \geq 7$ –, akkor is csak j_0 szerepét kaphatja, mert már a $h = j_1$ szerepben is legalább egy h jegyet és h db 1-est jelent, ami nem kevesebb, mint 14. Ha pedig a h jegynek j_0 szerepét adjuk, akkor a zérusnál nagyobb jegyek száma $10 - h$, és ez legföljebb 3. Közülük egyik maga h, egy másik j_h, aminek az értéke pontosan 1, végül emiatt j_1 is pozitív, és több pozitív számjegy részére még $h = 7$ esetén sincs helyünk, azaz $j_k = 0$, ha $k > 1$, és $k \neq h$. Ámde j_1 értékének legalább 2-nek kell lennie, hiszen $j_1 = 1$ ellentmondás, amikor j_h értéke is 1; másrészt $j_1 \leq s - (j_0 + j_h) \leq 2$, tehát $j_1 = 2$, és így j_2 is pozitív, holott már zérus áll a helyén. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Lényegében ugyanez a meggondolás egy megfelelő N számot ad, ha h értékét 6-ra csökkentjük. Így ugyanis $10 - h = 4$ helyre kell zérusnál nagyobb számjegyet írnunk, és ezek: $j_0 = 6$, $j_6 = 1$, továbbá az előbbi ellentmondás feloldódik, ha j_1-ként 2-t írunk be, mintegy előlegként, arra gondolva, hogy az így beírt 2-es címén j_2 szerepét adjuk az előlegezett, a második 1-esnek. Ezek szerint $N = 6\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$-ben egy megfelelő számot találtunk, és ezzel eleget tettünk a feladatból a tízes számrendszerre vonatkozó résznek.

II. Mivel az n alapú számrendszerben n-féle számjegyet használunk: $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, azért mindegyik fajta számjegy előfordulási számát csak úgy tüntetheti föl maga a szám, ha jegyeinek száma legalább n. Másrészt több sem lehet n-nél, eszerint a feladat általánosítása: „Keressünk az n-alapú számrendszerben olyan n-jegyű számot, amelyben a j-edik számjegy ($j \leq n$) azt mutatja, hányszor szerepel a számban a $(j-1)$-es számjegy".

Könnyű ellenőrizni, hogy a következő szám mindig megfelel:

$$N_n = (n-4)\ 2\ 1\ \underbrace{0\ 0 \ldots\ 0}_{n-7 \text{ db}}\ 1\ 0\ 0\ 0$$

(ami $n = 10$ esetén éppen a fenti N-et adja), hacsak a közbülső zérusok száma teljesíti az $n - 7 \geq 0$, azaz $n \geq 7$ követelményt, ekkor ugyanis $(n-4) = j_0 \geq 3$, és ez mint számjegy nem változtathatja meg j_1 és j_2 értékét.

$n = 6$ esetén N_n ben $(n-4) = 2$, emiatt az eddigi $j_{n-4} = 1$ jegy ugyanarra a helyre kerülne, ahol a $j_2 = 1$ áll, tehát az eddigi $j_1 = 2$ nem érvényes, de akkor j_2 sem, ez tehát ellentmondás. A megoldás I. részéhez hasonlóan be lehet látni, hogy a 6-os számrendszerben más megoldása sincs a feladatnak. (Ugyanis $j_0 + j_1 + \ldots + j_{n-1} = n$ és nem fordulhat elő $h = n - 3$, sem nagyobb jegy.)

Hasonlóan kapjuk, hogy $n = 5$ esetén $N_5 = 21\,200$ az egyetlen megoldás, $n = 4$ esetén könnyen adódik két megoldás, 1210 és 2020, végül $n = 3$ és $n = 2$ esetén nincs megoldás.

Juhari Katalin (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)
Rövid Kálmán (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., II. o. t)

Megjegyzés. Az I. rész folytatásával könnyen belátható, hogy a tízes számrendszerben nincs több megoldás N-re.

II. megoldás. I. Jelöljük a keresett szám első jegyét x_0-lal, a másodikat x_1-gyel, és így tovább, végül a tizediket x_9-cel. E jegyek összege annyi, ahány jegy összesen van, tehát

(1) $$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 10.$$

Kiszámíthatjuk a jegyek összegét másképp is: a k-val egyenlő jegyek összege $k \cdot x_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 9)$, tehát

(2) $$0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + 9 \cdot x_9 = 10.$$

Ezekből

(3) $$x_0 = x_2 + 2x_3 + \ldots + 8x_9.$$

Legyen röviden $x_0 = k$, akkor a k-val egyenlő jegyek száma legalább 1, vagyis $x_k \geq 1$. Így $k = 0$ ellentmondásra vezet, tehát $k > 0$. Jelöljük (3) jobb oldalán a $(k-1)x_k$-tól különböző tagok összegét S-sel, ekkor (3) ekvivalens a

$$k = S + (k-1)x_k$$

egyenlettel. Ebből rendezve és szorzattá alakítva

(4) $$S + (k-1)(x_k - 1) = 1$$

és a bal oldal mindkét tagja nemnegatív egész szám; tehát közülük az egyik 1, a másik 0.

a) Amennyiben

(5) $$S = 1, \qquad \text{és így} \qquad (k-1)(x_k - 1) = 0,$$

akkor (3) jobb oldalából $(k-1)x_k$-t elhagyva a visszamaradó tagok összege 1. Ez csak úgy lehet, ha

(6) $$x_2 = 1,$$

és emiatt $k \neq 2$, továbbá a többi tag 0-val egyenlő. (6) szerint legalább egy 1-es van, és $x_1 = 1$ mellett még egy 1-es volna, ami ellentmondást jelentene, így

(7) $$x_1 \geq 2.$$

Ebből $k = 1$ (azaz $x_0 = 1$) mellett az 1 2 1 0 0 ... 0 számot kapnánk, ami nem felel meg. Ha $k \neq 1$, akkor $k \geq 3$ és (5) szerint

(8) $$x_k = 1,$$

tehát az $x_1, x_2, \ldots, x_9$ jegyek között a (6), (7), (8) alattiak különböznek 0-tól, így

(9) $$k = x_0 = 6.$$

Az így kapott 6 2 1 0 0 0 1 0 0 0 szám megfelel a feladat követelményeinek.

b) Ha pedig

(10) $$S = 0 \qquad \text{és} \qquad (k-1)(x_k - 1) = 1,$$

akkor $k = x_k = 2$, és

(11) $$S = 2x_3 + \ldots + 8x_9 = 0,$$

vagyis $x_3 = \ldots = x_9 = 0$. Így (3)-ból $x_0 = 2$, (1)-ből $x_1 = 6$ következik, a 2 8 2 0...0 szám azonban nem megoldás.

Tehát feladatunknak egyetlen megoldása a 6 210 001 000 szám.

II. Az n alapú számrendszerben olyan $x_0x_1 \ldots x_{n-1}$ számot keresünk melynek a jegyei között a j-vel egyenlőek száma x_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, Ekkor a fentiekhez hasonlóan juthatunk el a (4) egyenletig, melyből az a) esetben ismét (5), (6) és (7) következik. A $k = 1$ értéknek megfelelő 1 2 1 0 ... 0 szám csak $n = 4$ mellett ad megoldást. Ha $k \neq 1$, akkor ismét (8)-at kapjuk. Az $x_0 + x_1 + x_2 + x_k = k + 4$ összeg értéke $k \geq 3$ miatt legalább 7, tehát ezekből az értékekből csak $n \geq 7$ mellett kapunk megoldást. Ha $n \geq 7$, (9) helyett a

(9a) $$k = x_0 = n - 4$$

feltételt kapjuk, és az

(12) $$\begin{cases} x_0 = n-4,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = \ldots = x_{n-5} = 0, \\ x_{n-4} = 1,\ x_{n-3} = x_{n-2} = x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

számjegyek. megfelelő számot határoznak meg.

Az általános esetben a b) feltételből ugyancsak $k = x_2 = 2$ és (11) következik, továbbá x_1 értékére $(n-4)$-et kapunk. Az

$$x_0 = 2,\ x_1 = n-4,\ x_2 = 2,\ x_3 = \ldots = x_{n-1} = 0$$

számjegyek azonban csak $n = 4$ és $n = 5$ mellett adnak megoldást.

Ha tehát $n = 2, 3, 6$, akkor a feladatnak nincs megoldása, $n = 4$ mellett két megoldása van: 1210 és 2020, $n = 5$ mellett egy megoldás van: 21 200, $n \geq 7$ Mellett ugyancsak egy megoldás van, amelyet a (12) alatti számjegyek határoznak meg.