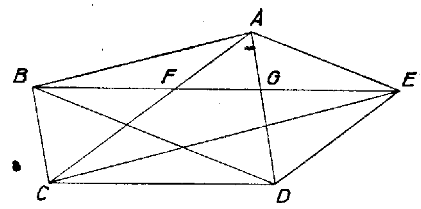
I. megoldás. *a)* Az oldalak és átlók párhuzamos párokba állítása egyértelmű, mert az $ABCDE$ ötszögben pl. az AB oldallal csak a CE átló lehet párhuzamos, hiszen a többi 4 átló kettesével A-ból és B-ből indul ki (1. ábra).



1. ábra

Elég lesz bizonyítani, hogy $AD : BC = AC : ED$, vagyis hogy két ugyanazon csúcsból kiinduló átló és a velük párhuzamos oldalak közti arány egyenlő. Ugyanis ötszögünknek egyik oldala sincs valamely tulajdonsággal megkülönböztetve a többiektől, így az adandó bizonyításban a betűk ciklikusan fölcserélhetők. A, B, C, D, E helyére rendre C, D, E, A, B-t írva eredményünkből $CA : DE = CE : BA$ adódik, amit az előbbivel egybevetve $AD : BC = CE : BA$, vagyis a kérdéses arányok akkor is egyenlők, ha közös csúccsal nem bíró két átlót osztunk a velük párhuzamos oldallal. Eszerint az arány értéke mind az öt párhuzamos szakaszpárra nézve ugyanaz lesz.

Mármost a BE átlónak AC-vel és AD-vel való metszéspontját F-fel, ill. G-vel jelölve, a keletkezett paralelogrammákban $BC = GD$, ill. $FC = ED$, ennélfogva a párhuzamos szelők tételét az CAD szög száraira alkalmazva

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{GD} = \frac{AC}{FC} = \frac{AC}{ED},$$

amit bizonyítani akartunk.

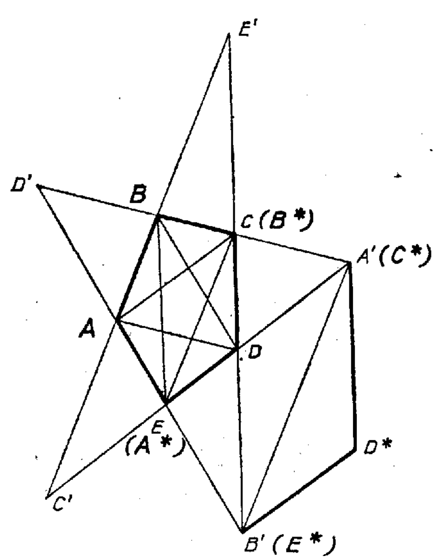
b) Az öt arány közös x értékére a BF és EFC háromszögek hasonlósága alapján teljesül

$$x = \frac{BE}{CD} = \frac{BF+FE}{FE} = \frac{BF}{FE} + 1 = \frac{BA}{CE} + 1 = \frac{1}{x} + 1,$$

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (= 1{,}618), \tag{1}$$

hiszen a konvexség folytán F belső pontja az ötszögnek, ezért $x = \dfrac{BE}{CD} > 1$, másrészt (1) másik gyöke negatív. Ezzel a megoldást befejeztük.

II. megoldás. Hosszabbítsuk meg mindegyik oldalt a vele nem szomszédos két oldalegyenessel való metszésig, és legyen a metszéspontok jele A', B', C', D', E' úgy, hogy – a föltevés alapján – az $ACA'D$, $BDB'E$, $CEC'A$, $DAD'B$ és $EBE'C$ négyszögek paralelogrammák. Így mindegyik oldalegyenes két új pontja egymás tükrös párja az illető oldal felezőpontjára nézve, pl. C' és E' az AB oldal felezőpontjára, hiszen $C'A \# EC \# BE'$ (2. ábra).



2. ábra

Ezek alapján az AB oldal és a vele párhuzamos átló $CE:AB=x$ arányát egymás utáni párhuzamos vetítésekkel és tükrözésekkel átvihetjük az AB egyenes más két szakaszának arányába:

$$x=\frac{EC}{AB}=\frac{CD'}{BD'}=\frac{BA'}{CA'}=\frac{EA'}{DA'}=\frac{DC'}{EC'}=$$

$$=\frac{BC'}{AC'}=\frac{BA+AC'}{AC'}=\frac{BA+CE}{CE}=\frac{1}{x}+1,$$

eszerint $CE^2=AB(AB+CE)$, x-re pedig ismét a fenti (1) adódik.

Eredményünket az ötszögnek kizárólag a föltevés szerinti tulajdonságából kaptuk – sőt a párhuzamosságok közül csak 4-et használtunk fel (a CD és BE közöttit nem, hiszen nem szerepelt B', sem E') – tehát az arány bármely ilyen ötszögben bármelyik átló és a vele párhuzamos oldal között ugyanekkora értékű.

III. megoldás. Tovább használjuk a II. megoldásban bevezetett jelöléseket. Nagyítsuk ki az $ABCDE$ ötszöget a D' centrumból úgy, hogy az A csúcs képe E legyen, és jelöljük az új csúcsokat rendre A^*-gal, B^*-gal, C^*-gal, D^*-gal és E^*-gal. E jelölés szerint A^* azonos E-vel. Az AB egyenes képe az A^*-on átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes, vagyis EC; másrészt B^* rajta van a $D'B$ egyenesen, tehát B^* azonos C-vel. Az AC egyenes képe az A^*-on átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes, vagyis ED; és mivel C^* rajta van a $D'C$ egyenesen, C^* azonos A'-vel. Hasonlóan kapjuk, hogy E^* azonos B'-vel, abból pedig, hogy D az E-n, illetve C-n átmenő, AC-vel, illetve BE-vel párhuzamos egyenes metszéspontja, következik, hogy D^* a B', D, A' pontokat paralelogrammává kiegészítő pont (2. ábra).

Az $A^*B^*C^*D^*E^*$ ötszög A^*B^* oldala azonos az eredeti ötszög EC átlójával. Mivel $ADA'C$ paralelogramma, B^*C^* egyenlő az AD átlóval, és hasonlóan kapjuk, hogy A^*E^* egyenlő BD-vel. Végül C^*D^*, illetve D^*E^* egyenlő DB'-vel, illetve DA'-vel, ezek pedig egyenlőek a BE, illetve AC átlókkal. Az $ABCDE$ ötszög centrális hasonlóságából származó képének az oldalai tehát rendre egyenlőek az eredeti ötszög velük párhuzamos átlóival. Emiatt az eredeti ötszög bármely oldalának és a vele párhuzamos átlójának az aránya egyenlő az $ABCDE$, $A^*B^*C^*D^*E^*$ ötszögek megfelelő oldalainak az arányával, ami minden oldalra ugyanaz az érték, hiszen nem más, mint az alkalmazott nagyítás aránya.

Rátérünk ennek az aránynak a meghatározására. Az előbb mondottakból következik, hogy például

$$CD:BE=C^*D^*:B^*E^*,$$

ahol C^*D^* egyenlő BE-vel, B^*E^* pedig azonos CB'-vel, tehát egyenlő CD-nek és a DB'-vel egyenlő BE-nek összegével:

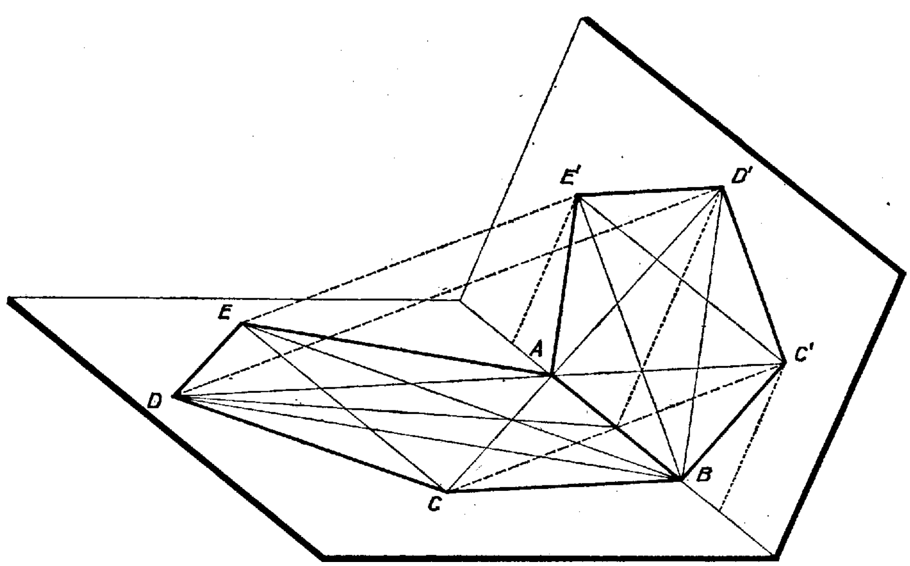
$$CD:BE=BE:(CD+BE).$$

Ebből az $x=\dfrac{BE}{CD}$ hányadosra az (1)-gyel azonos

$$x=\frac{1}{x}+1$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek pozitív gyöke $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

IV. megoldás. Legyen S_2 az $ABCDE$ ötszög síkját az AB egyenesben metsző tetszőleges sík, $A'B'C'D'E'$ pedig S_2-ben egy olyan szabályos ötszög, melynek A', illetve B' csúcsa azonos A-val, illetve B-vel. Húzzunk párhuzamost C-n és E-n át a DD' egyenessel, és jelöljük ezek S_2-vel alkotott metszéspontjait C^*-gal, illetve E^*-gal. Azt fogjuk megmutatni, hogy C^* azonos C'-vel, E^* pedig E'-vel (3. ábra).



3. ábra

Mivel $EC \parallel AB$, az EE^*, CC^* egyenesek által meghatározott sík párhuzamos AB-vel, és ugyancsak párhuzamos AB-vel ennek a síknak az S_2-vel alkotott E^*C^* metszésvonala is.

Hasonlóan kapjuk AE és BD, illetve BC és AD párhuzamosságából, hogy $AE^* \parallel BD'$, illetve $BC^* \parallel AD'$, tehát E^* az AE', C^* pedig a BC' egyenesen van. Mivel az ABD' háromszög egyenlő szárú, az AB egyenes t felező merőlegesére tükrözve a háromszög önmagába megy át, ez a tükrözés az AB-vel párhuzamos C^*E^* egyenest is önmagába viszi át, a BC^* egyenes képe pedig az AE^* egyenes. Ezek szerint C^* képe E^*, és t az $ABC^*D'E^*$ ötszög szimmetriatengelye. A fentiekhez hasonlóan CD és BE párhuzamossága maga után vonja C^*D' és BE^* párhuzamosságát, ebből pedig következik (anélkül, hogy a DE és AC párhuzamosságára vonatkozó feltételt használnánk), hogy $D'E^*$ és AC^* is párhuzamosak.

Ha a C^*, E^* pontokat úgy mozgatjuk a BC', AE' félegyeneseken, hogy közben C^*E^* párhuzamos AB-vel, akkor B-től, illetve A-tól távolodva a $D'AC^*$ szög monoton csökken, az $AD'E^*$ szög monoton nő, tehát ez a két szög a C^*E egyenesnek csak egyetlen helyzeténél lehet egyenlő. Ez be is következik, ha C^* azonos C'-vel, E^* pedig E'-vel, tehát ekkor és csakis ekkor lehet AC^* párhuzamos E^*D'-vel, előrebocsátott állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Igaz a párhuzamos szelők tételének a következő általánosítása (melynek bizonyítását az olvasóra hagyjuk). Ha PQ és RS párhuzamos szakaszok az S_1 síkban, és a végpontjaikon át S_2-t metsző, egymással párhuzamos egyeneseket fektetünk, melyek S_2-t rendre a P', Q', R', S' pontokban metszik, akkor $PQ : RS = P'Q' : R'S'$. Emiatt az $ABCDE$ ötszög oldalainak a velük párhuzamos átlóival alkotott aránya egyenlő az $ABC'D'E'$ ötszög megfelelő szakaszainak az arányával, ami $(\sqrt{5}+1):2$.

Megjegyzések. 1. A IV. megoldás módszerével könnyen bizonyítható, hogy ha A, B, D a sík tetszőleges pontjai (melyek nincsenek egy egyenesen), akkor mindig található egy és csakis egy C, E pontpár a síkon úgy, hogy az $ABCDE$ ötszögre teljesüljenek a feladat feltételei. Azt is láttuk a II. és a IV. megoldásban, hogy elegendő 4 átló-oldal-pár párhuzamosságát feltenni, ebből már következik az ötödik pár arányának egyezése és párhuzamos volta.

2. A II. és a III. megoldásban azt kaptuk, hogy a vizsgált ötszögek oldal : átló aránya egyenlő az átló: (oldal+átló) arányával. Azt mondjuk, hogy ha egy kisebb és egy nagyobb szakasz aránya egyenlő a nagyobbik és az összegük arányával, akkor a két szakasz aránya „folytonos arány." (Az elnevezést az indokolja, hogy – amint az könnyen látható – a mondott tulajdonság öröklődik a hosszabbik szakaszból és a két szakasz összegéből álló párra.) Adott szakasz folytonos arányú részekre való osztását pedig „arany metszésnek" nevezzük. Ez a tulajdonság könnyen ellenőrizhető a megoldásunkban kapott $(\sqrt{5}+1)$, 2 szakaszhosszakra, és megoldásainkban azt is láttuk, hogy a $(\sqrt{5}+1):2$ arány az egyetlen folytonos arány.

3. A IV. megoldásban alkalmazott párhuzamos vetítést affinitásnak nevezik. Láttuk, hogy a vizsgált ötszögek mindig előállíthatók egy szabályos ötszög affin képeként, ezért ezeket az ötszögeket „affin szabályos ötszögnek" is szokták nevezni.