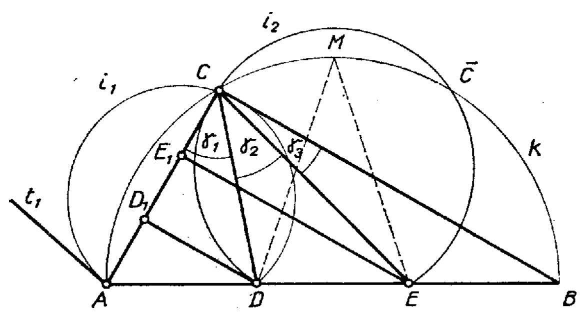
**I. megoldás** (szerkesztéssel). A feladat föltevései távolsági arányokat és egy szöget tartalmaznak, és a kérdés is szögre vonatkozik, így az alakzat tetszés szerint nagyítható.

Fölvéve tetszőlegesen az $AB$ átfogót és kijelölve $D$, $E$ harmadoló pontjait úgy, hogy $AD = DE = EB$, a $C$ csúcs mértani helye egyrészt az $AB$ átmérőjű $k$ Thalész-félkör az $AB$ egyenessel kettévágott sík egyik, $F$ félsíkján, másrészt az $AD$ szakasz $ACD\sphericalangle = \gamma_1$ nyílású $i_1$ látóköríve, és a $DE$ szakasz $DCE\sphericalangle = \gamma_2$ nyílású $i_2$ látóköríve, ugyancsak az $F$ félsíkon (1. ábra, lásd a 20. oldalon).




*1. ábra*

1. Ezek szerint ha $\gamma_1$ adott, akkor $C$ megfelelő helyzetét $k$-nak és $i_1$-nek az $A$-tól különböző közös pontja adja, és $\gamma_2$ a $CD$, $CE$ félegyenesek közti szög. A szerkesztés helyessége nyilvánvaló. Eljárásunk egyértelműen megadja $\gamma_2$-t, természetesen a nyilvánvaló $0° < \gamma_1 < 90°$ esetre szorítkozva, ekkor ugyanis $i_1$-nek $A$-beli $t_1$ félérintője – az érintőjének $F$-beli félegyenese tompaszöget $(180° - \gamma_1$-et) zár be az $AB$ félegyenessel, ezért $i_1$-nek van pontja $k$-n kívül, $D$ végpontja viszont belül van a $k$-n.

Meggondolásunk és szerkesztésünk akkor is érvényes, ha $\gamma_1$-et úgy értelmezzük, hogy $D$ a $B$-hez közelebbi harmadolópontja az átfogónak, így azonban más lesz $\gamma_2$ értéke. Itt jegyezzük meg mindjárt, hogy $\gamma_1$ határozta meg magának az $ABC$ háromszögnek a hegyes szögeit is.

2. Ha pedig $\gamma_2$ adott, akkor $C$-ként $k$ és $i_2$ közös pontjai jönnek tekintetbe, és $\gamma_1$ a $CA$, $CD$ félegyenesek közti szög lesz. A közös pontok száma 2, 1, ill. 0 aszerint, hogy $i_2$ metszi vagy érinti $k$-t, ill. hogy minden pontja $k$ belsejében van. $k$-nak és $i_2$-nek közös szimmetria tengelye az $AB$ és $DE$ szakaszok $f$ közös felező merőlegese, így a mondott érintés csak $f$-nek $k$-n levő $M$ pontjában lehetséges. Ezt felhasználva $k$ és $i_2$ közös pontjainak száma aszerint lesz 2, 1, ill. 0, hogy $\gamma_2$ kisebb, ill. egyenlő, ill. nagyobb, mint a $DME\sphericalangle$, vagyis annak az egyenlő szárú háromszögnek a szárszöge, melyben az alap és a magasság aránya $(AB/3) : (AB/2) = 2 : 3$. Más szóval, aszerint, hogy

$$\frac{\gamma_2}{2} \gtreqless \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} \quad (= 0{,}322 \text{ radián} = 18°26'), \quad \gamma_2 \gtreqless 36°52'. \tag{1}$$

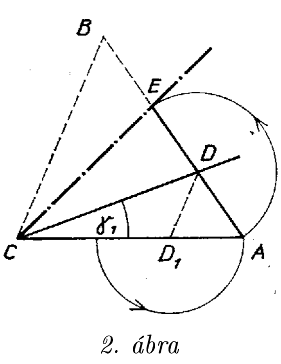
Két közös pont, $C$ és $\overline{C}$ esetén a szimmetria alapján az $A\overline{C}D\sphericalangle$ egyenlő a $BCE\sphericalangle$-gel. Mondhatjuk tehát azt is, hogy $C$-re szorítkozva $ACD\sphericalangle$ és $BCE\sphericalangle$ a feladat második részének 2 megoldása, továbbá e két megoldás egyenlő, ha $C$ az $M$-ben adódik, végül nincs megoldás $\gamma_1$-re, ha $C$-re sincs megoldás.

*Borusz Mária* (Tata, Eötvös J. Gimn., II. o. t.)
*Mérő László* (Tatabánya, Árpád Gimn., II. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Könnyű utánaszámítani, hogy $\gamma_2$ határszögét megadja a 3, 4, 5 egységnyi oldalú (derékszögű) háromszög legkisebbik szöge is.

2. Könnyen általánosíthatjuk a megoldást arra az esetre, ha $ACB$ tetszőleges adott szög; az (1) föltétel módosulásának vizsgálatát az olvasóra hagyjuk.

3. Adott $\gamma_1$ esetében célhoz vezet a következő szerkesztés is. A $CA$ félegyenesre (ugyanazon oldalán) fölmérjük $\gamma_1$-et, új szára $CD$ ($D$ a szár egy tetszőleges pontja) és az $ACB$ ismert szöget (2. ábra). $D$-n át párhuzamost húzunk $BC$-vel, ennek metszéspontja $CA$-val $D_1$, ekkor $D_1$-et $C$-ből 3/2-szeresére nagyítva kapjuk $A$-t, ennek tükörképe $D$-re $E$, és ezzel megkaptuk a $DCE$ szöget.




*2. ábra*

**II. megoldás** (számítással). Legyen $D$ és $E$ merőleges vetülete $CA$-n $D_1$, $E_1$, így $CE_1 = E_1D_1 = CD_1/2$ és $EE_1 = 2DD_1$ (1. ábra), tehát

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{DD_1}{CD_1}, \quad \operatorname{tg}(\gamma_1+\gamma_2) = \frac{EE_1}{CE_1} = 4\operatorname{tg}\gamma_1, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_2 = \operatorname{tg}\{(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_1\} = \frac{\operatorname{tg}(\gamma_1+\gamma_2)-\operatorname{tg}\gamma_1}{1+\operatorname{tg}\gamma_1\cdot\operatorname{tg}(\gamma_1+\gamma_2)} = \frac{3\operatorname{tg}\gamma_1}{1+4\operatorname{tg}\gamma_1}.$$

Adott $\gamma_1$ – természetesen $0<\gamma_1<90^\circ$ – esetén innen $\operatorname{tg}\gamma_2$ pozitív, és $\gamma_2$ – mint hegyes szög – egyértelműen meg van határozva.

Ha viszont $\gamma_2$ adott, akkor átrendezéssel

$$4\operatorname{tg}\gamma_2\cdot\operatorname{tg}^2\gamma_1 - 3\operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2 = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{3\pm\sqrt{9-16\operatorname{tg}^2\gamma_2}}{8\operatorname{tg}\gamma_2},$$

valós megoldás létezésének föltétele

$$9-16\operatorname{tg}^2\gamma_2 \geq 0 \quad \text{azaz} \quad 0<\gamma_2\leq \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}, \tag{3}$$

és egyenlőség esetén $\operatorname{tg}\gamma_1$ két értéke egyenlő. Az egyenlőtlenség teljesülése esetén (1)-nek mindkét megoldása, $\operatorname{tg}\gamma_1'$ és $\operatorname{tg}\gamma_1''$ megfelel, mert pozitívok, hiszen (2) szerint összegük is, szorzatuk is pozitív:

$$\operatorname{tg}\gamma_1' + \operatorname{tg}\gamma_1'' = \frac{3}{4\operatorname{tg}\gamma_2}, \quad \operatorname{tg}\gamma_1'\cdot\operatorname{tg}\gamma_1'' = \frac{1}{4};$$

Azt is látjuk ezekből, hogy $\gamma_1'+\gamma_1''$ a $\gamma_2$-nek pótszöge:

$$\operatorname{tg}(\gamma_1'+\gamma_1'') = \frac{\operatorname{tg}\gamma_1'+\operatorname{tg}\gamma_1''}{1-\operatorname{tg}\gamma_1'\cdot\operatorname{tg}\gamma_1''} = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_2} = \operatorname{ctg}\gamma_2,$$

tehát $\gamma_1'+\gamma_2+\gamma_1''=90^\circ$, vagyis adott $\gamma_2$ esetén $\gamma_1$-re ugyan két gyököt is kapunk, de ezek ugyanannak a háromszögnek rész-szögei.

Amennyiben az átfogó pontjainak sorrendje $A$, $E$, $D$, $B$, úgy (1) helyére $4\operatorname{tg}(\gamma_1-\gamma_2) = \operatorname{tg}\gamma_1$ lép, $\operatorname{tg}\gamma_2 = (3\operatorname{tg}\gamma_1)/(4+\operatorname{tg}^2\gamma_1)$, ekkor $\gamma_1'+\gamma_1''-\gamma_2 = 90^\circ$ ($\gamma_2$ kétszer fedett), a számítás hasonlóan végezhető, a valós megoldás létezésének föltétele – a szimmetria alapján – ismét (3), csak egy megoldás van.

*Megjegyzés.* Könnyű belátni, hogy $BCE\sphericalangle = \gamma_3$ jelöléssel fennáll $3\sin\gamma_1\cdot\sin\gamma_3 - \sin\gamma_2 = 0$, ennek alapján is végezhetjük számításainkat, eleve tudva, hogy $\gamma_1$ és $\gamma_3$ a feladat 2. részének 2. megoldása.