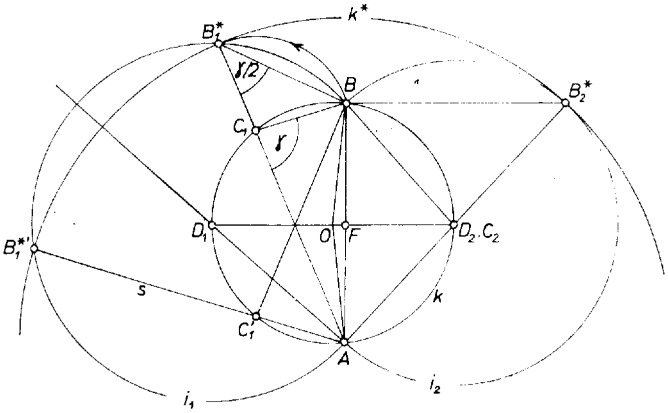
I. megoldás. A keresett ABC háromszögben az adott oldal szerepét $AB = = c$-nek adjuk, így az összegként adott hosszúság $s = BC + CA = a + b$ lesz.

1. Kiindulunk egy kívánt r sugárral leírt k körből, legyen a középpontja O, megválasztjuk rajta az A csúcs helyzetét és ettől c távolságra kijelöljük k-n a B-t; így már csak C-t kell meghatároznunk.

Most – a feladatot megoldottnak tekintve – fordítsuk rá B-t C körül AC meghosszabbítására, a B^* helyzetbe (1. ábra, a betűk melletti indexeket csak később vegyük figyelembe, az AB egyenestől balra is, jobbra is egy-egy megfelelő háromszög látható).



1. ábra

Így egyrészt $AB^* = AC + CB = s$, másrészt a CB^*B háromszög egyenlő szárú, és C-nél levő külső szöge $\gamma = ACB\sphericalangle = \dfrac{1}{2}AOB\sphericalangle$. (Az utóbbi szögön a C-t nem tartalmazó AOB szögtartományt értjük, ami $180°$-nál nagyobb is lehet, ha ti. C a rövidebbik AB köríven van.) Eszerint $CB^*B\sphericalangle = AB^*B\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{4}AOB\sphericalangle$, ismert.

Ezzel B^*-ra két mértani helyet kaptunk: rajta van az A körüli, s sugarú k^* körön, másrészt az AB szakasz $\dfrac{\gamma}{2}$ nyílású i látszögkörívén, az AB egyenesnek C-t tartalmazó partján. A k^* és i közös pontjaként kapott B^*-ot A-val összekötő egyenes k-ból kimetszi C-t és ezzel a szerkesztést befejeztük.

2. A végrehajtásra térve, megjegyezzük, hogy az i körív D középpontjából AB látószöge $2 \cdot AB^*B\sphericalangle = \gamma = ACB\sphericalangle$, tehát D rajta van k-nak a C-t tartalmazó AB ívén, továbbá $DA = DB$ miatt az AB oldal felező merőlegesén is; i tehát könnyen megrajzolható.

3. Bebizonyítjuk, hogy a kapott ABC háromszög megfelel a követelményeknek. Valóban, csúcsai egy r sugarú kör kerületén vannak; továbbá AB oldala egyenlő az előírt c-vel; végül a CB^*B háromszög B^*-nál levő szöge feleakkora, mint az $ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, ami e háromszög C-nél levő külső szöge; ezért ez a háromszög egyenlő szárú, tehát $AC + CB = AC + CB^* = AB^* = s$, amint a feladat kívánja.

4. Az A csúcs megválasztása után B létrejön, hacsak $c \leq 2r$; egyenlőség esetén a két AB félkör közül a szimmetria alapján bármelyiket választhatjuk D, majd C számára, és ha a háromszög a továbbiak szerint létrejön, akkor C-nél derékszögű lesz. [1] Ha viszont $c < 2r$, akkor a szerkesztés folytatását egyaránt meg kell próbálnunk a nagyobbik AB ívnek D_1 és a kisebbik AB ívnek D_2 felezőpontjából kiindulva.

A D_j körüli, $D_jA = R_j$ sugarú i_j körív ($j = 1,\ 2$) mindenesetre létrejön. B_j^* -ot tekintve, eleve szükséges, hogy $d > c$ legyen, másrészt k^*-nak akkor és csak akkor van közös pontja i_j-vel, ha még $s \leq 2R_j$, vagyis az AOF és AD_jF derékszögű háromszögek (F felezi AB-t) felhasználásával

$$c < s \leq 2R_j = 2\sqrt{2r^2 \pm r\sqrt{4r^2 - c^2}}, \tag{1}$$

speciálisan $c = 2r$ esetén

$$2r < s \leq 2\sqrt{2}r. \tag{1a}$$

Amennyiben $s = 2R_j$, akkor egy közös B_j^* pont van, C_j azonosnak adódik D_j-vel – hiszen ekkor B_j^* a k^* és i_j közös AD_j tengelyén (átmérőegyenesén) van –, a kapott háromszögben $C_jA = C_jB = s/2$ (ilyen az 1. ábrán B_2^* esete). Ha viszont $s < 2R_j$, akkor helyzet szerint két közös pontot kapunk (az 1. ábrán B_1^* és $B_1^{*'}$), a belőlük adódó két C_j pont azonban két egybevágó háromszögre vezet, tehát számunkra nem tekintendő külön megoldásnak. Valóban, ekkor B_j^* és $B_j^{*'}$ egymás tükörképei AD_j-re, így

$$C_j'AD_j\sphericalangle = B_j^{*'}AD_j\sphericalangle = B_j^*AD_j\sphericalangle = C_jAD_j, \qquad \widehat{C_j'D_j} = \widehat{C_jD_j}$$

[1] Ez a speciális eset a középiskolai I. o. tankönyv (1966. évi kiadás) 402. oldalának 33. feladata.

vagyis a két C_j pont – és a két ABC_j háromszög – tükrös pár az OD_j tengelyre.

Ezek szerint $c < 2r$ mellett a megoldások száma annyi, ahány j indexre teljesül (1), más szóval ahány i_j ívvel van közös pontja k^*-nak, ez a szám lehet 2, 1 vagy 0; $c = 2r$ mellett pedig 1 vagy 0 aszerint, hogy s-re teljesül-e (1a) vagy nem. (A két különböző AB íven kapott C pontok nem adhatnak egybevágó megoldásokat, hiszen C-nél levő szögük különböző.)

(Megjegyezzük, hogy az ABC háromszög adódhat egyenlő szárúnak úgy is, hogy a és b valamelyike – vagy akár mind a kettő – egyenlő c-vel. Ennek feltételét azonban nem keressük, a $CA = CB$ esetet is csupán szemléletesség kedvéért említettük meg.)

Megjegyzések. 1. A fentiekben példát adtunk egy szerkesztési feladat ún. „klasszikus" megoldásának 4 fő szakaszára:

1. Elemzés (kapcsolatok megállapítása az ismeretlen alakzat és az adatok között.
2. A szerkesztés végrehajtásának részletei.
3. Bizonyítása annak, hogy a szerkesztett alakzat megfelel az előírásoknak.
4. Diszkusszió: annak vizsgálata, hogy a szerkesztés az adatok közti milyen nagyságviszonyok (egyéb kapcsolatok) mellett végezhető el, és hogy esetenként hány megoldás van.

– Ezek a lépések természetesen a feladattól függően módosulhatnak, el is maradhatnak.

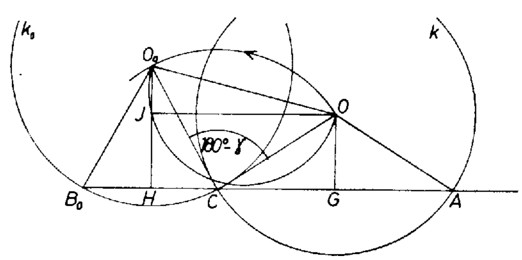
2. Régebbi tankönyvekben típusfeladatként szokott szerepelni a háromszögnek az $a + b$, c, γ adathármasból való szerkesztése. Tulajdonképpen ilyen az [1] alatt említett is, hiszen abban körről nincs szó, nincs kiemelve, hogy az átfogó egyszersmind a körülírt kör átmérője. Ezeket az eseteket is b-nek a meghosszabbítására való ráfordításával szokás megoldani, amint ezt az elemet mi is fölhasználtuk. A fenti megoldással szemben viszont eltérés, hogy ott a egyenesét és rajta az s szakaszt rögzítjük, egyik végpontjában hozzá $\gamma/2$ szöggel hajló félegyenest szerkesztünk és ezt elmetsszük a másik végpont körüli c sugarú körrel, tehát más sorrendben „vetjük be" adatainkat.

Számos megoldás érkezett erre az esetre való visszavezetéssel. Ezekben nehézségként jelentkezik, hogy γ megszerkesztéséhez előre föl kell vennünk egy r sugarú kört, de nem ez lesz a végül kiadódó háromszög körülírt köre, és a föntivel szemben külön gond annak a bizonyítása, hogy a körülírt kör sugara valóban r. Az is gyakori az ilyen megoldásokban, hogy γ-ként csak a hegyesszöget veszik figyelembe – különben a tompaszöget a fenti elv szerint is el lehet felejteni.

3. Felhívjuk az olvasó figyelmét a 107. oldalon közölt cikkünkre, amely ugyanennek a feladatnak térbeli – ábrázoló geometriai – meggondolásokon alapuló megoldását tartalmazza.

4. Az alábbi megoldásvázlat más érdekes kapcsolatokat használ, de a végrehajtás, a bizonyítás és a diszkusszió hosszadalmas. A teljes kidolgozást az olvasóra hagyjuk.

II. megoldás. (vázlat). Az 1. ábra CAO háromszögét próbáljuk megszerkeszteni. Fordítsuk el a CBO háromszöget és k-t C körül úgy, hogy B az AC oldal meghosszabbítására jusson, és jelöljük BO és k új helyzetét B_0O_0-lal (B_0 azonos a fenti B^*-gal).



2. ábra

Az elfordítás mértéke a C-nél levő külső szög: $180° - \gamma$, amekkora az AB látószöge D_2-ből, ha C-t a D_1 oldalán várjuk, illetve D_1-ből, ha D_2 oldalán. Eszerint a fönti k, A, B, D_j ($j = 1,\ 2$) rendszer fölvétele után megszerkeszthetjük egy új helyzetben az OCO_0 egyenlő (r) szárú háromszöget, k-t és k_0-t, és most olyan szelő szerkesztését tekintjük célunknak C-n át, melyre a k-ba és k_0-ba eső húrok összege $B_0A = s$.

Jelöljük az AC és CB_0 szakasz felezőpontját G-vel, H-val és O vetületét az O_0H egyenesen J-vel. Ekkor nyílván $OJ = GH = s/2$, ebből J az ismert OO_0 szakasz fölötti Thalész-körön kijelölhető, és a kívánt szelő OJ-vel párhuzamos. A szelő CB_0 szakaszát C körül $(180° - \gamma)$-val visszafordítva kapjuk B-t.

Ekkor azt kell bizonyítanunk, hogy B ráesik k-ra és hogy $BA = c$.

A végrehajtást $(180° - \gamma)$ helyén γ-val meg kell ismételni.

Megjegyzés. Ennek a megoldásnak C a kulcspontja, de az ide előzetesen elhelyezendő $(180° - \gamma)$ szöghöz nem juthatunk hozzá A és B előbbi, ideiglenes – később kárba vesző – fölvétele nélkül. C tehát „nehéz" pontja a feladatnak. (Így jól láthatjuk, hogy az I. megoldásban nincs fölösleges szerkesztési lépés, mindegyik adatunkat csak egyszer használtuk.)