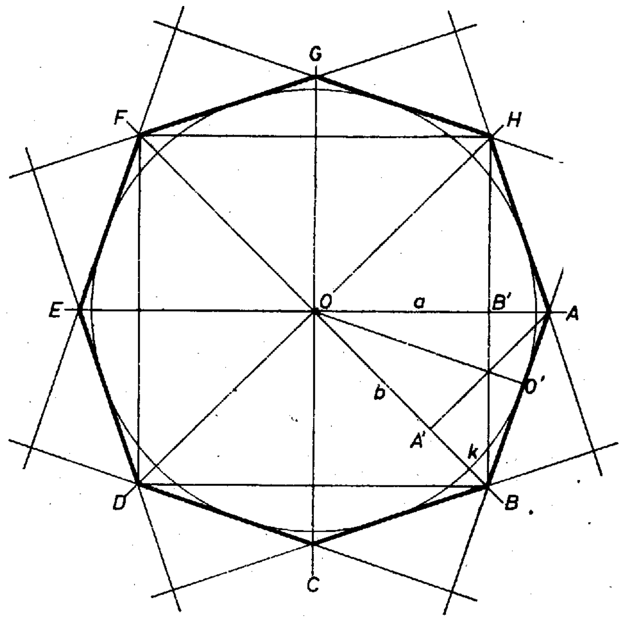
1. Első lépésül a 4 szimmetriatengelynek az N nyolcszöghöz és egymáshoz viszonyított helyzetét kell tisztáznunk. Legyenek N egymás utáni csúcsai A, B, C, D, E, F, G, H és a kiindulási k kör középpontja O.

Mivel az AB és AH egyenesek érintik k-t, azért egymás tükörképei az AO egyenesre mint tengelyre. Megmutatjuk, hogy AO az N-nek is tengelye. AO a k-nak mindenesetre tengelye. Másrészt az adatok szerint N oldalai közt csak egyféle hosszúság lép föl, így $AB = AH$, a B, H csúcsok is egymás tükrös párjai; ezért a belőlük k-hoz húzott második érintők, a BC és HG egyenesek is, és $BC = HG$ alapján a C, G csúcsok is egymás képei AO-ra. Tovább ugyanígy a CD, GF egyenesek, a D, F csúcsok, végül a DE, FE egyenesek is páronként egymás képei, ezért E rajta van az AO egyenesen, ez tehát valóban szimmetria-tengelye N-nek, és egyben átlója is, két szemben fekvő csúcsot köt össze.

Ugyanígy adódik a betűk ciklikus fölcserélésével, hogy N a BF, CG és DH átlóira nézve is szimmetrikus. Így ez az a 4 tengely, amiről a feladat föltevése szólt, más tengely tehát nincs is. Mind a négy tengely átmegy O-n.



Meggondolásunk szerint a BH, DF, CG átlók merőlegesek AE-re, és hasonlóan BD, FH merőlegesek CG-re, tehát a $BDFH$ idom derékszögű négyszög. És mivel még ugyanígy ennek BF és DH átlói merőlegesek egymásra, azért $BDFH$ négyzet, a négy tengely közül bármelyik kettő vagy 90° vagy 45° szöggel hajlik egymáshoz. A betűk kellő cseréjével ugyanez áll $ACEG$-re és e 4–4 csúcs egy-egy, az O körüli körön van. Nem lehet e két kör azonos egymással, különben az ABO háromszög egyenlő szárú lenne, és ez a háromszög, valamint N is szimmetrikus lenne AB felező merőlegesére, ami különböző a talált tengelyektől.

2. Jelöljük OA, OB hosszát a-val, illetve b-vel, B-nek OA-n levő vetületét B'-vel, O vetületét AB-n O'-vel, ekkor a mondottak szerint $OB' = B'B = b/\sqrt{2}$ és $B'A = |a - b/\sqrt{2}|$. Az ABB' háromszögből

$$AB^2 = 25 = \left(a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab, \tag{1}$$

és az AOB háromszög területének kétféle kifejezéséből

$$\frac{1}{2}AO \cdot BB' = \frac{ab}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}AB \cdot OO' = 15,$$

$$ab = 30\sqrt{2}. \tag{2}$$

Az utóbbit (1)-be helyettesítve

$$a^2 + b^2 = 85, \tag{3}$$

és a (2), (3) rendszerből, fölismerve, hogy $85 = 45 + 40$ és

$$2ab = 60\sqrt{2} = 2\sqrt{1800} = 2\sqrt{45 \cdot 40},$$

kapjuk:

$$(a \pm b)^2 = 85 \pm 60\sqrt{2} = 45 \pm 2\sqrt{45 \cdot 40} + 40 = (\sqrt{45} \pm \sqrt{40})^2.$$

Megállapodhatunk, hogy legyen $OA \leqq OB$, ekkor N-nek azok az átlói, amelyek a mondott négyzeteknek is átlói, ill. oldalai

$$AE = 2a = \left(\sqrt{45}+\sqrt{40}\right) - \left(\sqrt{45}-\sqrt{40}\right) = 4\sqrt{10}(= 12{,}65 \text{ egység}),$$
$$BF = 2b = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5}(= 13{,}42 \text{ egység})$$

(és ekkor $OB' = 3\sqrt{2{,}5} = 1{,}5\sqrt{10} < 2\sqrt{10} = OA$, tehát N konvex), továbbá

$$AC = a\sqrt{2} = 4\sqrt{5}(= 8{,}944 \text{ egység}), \qquad BD = b\sqrt{2} = 3\sqrt{10}(= 9{,}487 \text{ egység}).$$

Végül az az átló, amely a kisebb és a nagyobb négyzet egy-egy legtávolabbi csúcsát köti össze:

$$BE^2 = EB'^2 + B'B^2 = \left(a + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = 85 + \sqrt{2}ab = 145,$$

$$BE = \sqrt{145} = 12{,}04 \text{ egység}.$$

Az AE, BF, AC, BD, BE hosszúság a szimmetriák alapján rendre 2, 2, 4, 4, 8 átló hosszát adja meg, ez együtt 20 átló, ennyi átlója van minden konvex nyolcszögnek, eszerint a feladat megoldását befejeztük.

Megjegyzések. 1. Az $OO' = 6$ adat és az $OA = \sqrt{40}$ eredmény egybevetéséből érdekes egyszerű eredményként $O'A = 2, O'B = 3$ egység. Kiadódik ez – a számos megoldó által használt tangens-addíciós összefüggés nélkül is: legyen még A vetülete OB-n A', ekkor $O'A = x$ jelöléssel $O'B = 5 - x$,

$$\operatorname{tg} O'OA\sphericalangle = \operatorname{tg} B'BA\sphericalangle, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg} O'OB\sphericalangle = \operatorname{tg} A'AB\sphericalangle$$

alapján

$$\frac{x}{6} = \frac{AB'}{BB'} = \frac{a - \frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}a}{b} - 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{5-x}{6} = \frac{\sqrt{2}b}{a} - 1,$$

innen pedig az a/b hányadost kiküszöbölve

$$\frac{(x+6)(11-x)}{72} = 1, \qquad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$x = 2$ (a kisebbik gyök, mivel $OA < OB$ miatt $O'A < O'B$).

2. Megállapíthatjuk a 4 szimmetriatengely kölcsönös helyzetét anélkül is, hogy kihasználnánk k körnek az oldalakkal való érintkezését és az oldalak egyenlőségét, de természetesen hosszabb meggondolással. Vázoljuk ennek lépéseit:

α) nem lehet két párhuzamos a tengelyek közt, tehát bármelyik két tengely metszi egymást;

β) bármelyik tengelyre nézve a többi 3 tengely tükörképe is tengely, így egyikük önmagába megy át, a másik kettő egymásba;

γ) eszerint a 4 tengely két egymásra merőleges párba kapcsolódik, bármelyik pár felezi a másik pár közti 4 szöget, ezért a szögek 45° többszörösei.

3. Mindenesetre bizonyítani kellett volna valahogyan a tengelyek helyzetéről csak mintegy „megérzés alapján” kimondottakat. Az érkezett dolgozatok viszont rögtön ezzel kezdődtek; jobb esetben ennyi bevezetéssel: „könnyű belátni, hogy …”.

4. Nyolcszögünk csak konvex lehet. Ha ugyanis hurkolt lenne, a kerületen végigjárva, $8 \cdot 5 = 40$ egységnyi úttal 3-szor járnánk körül k-t, holott annak a kerülete $12\,\pi = 37{,}7$ egység.