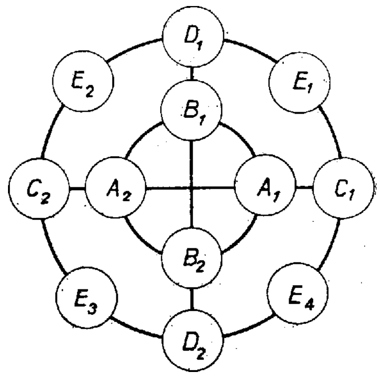
I. Jelöljük a kis körökben elhelyezett számokat az ábra szerint, és a belső körben elhelyezett számok összegét S-sel.



Feladatunk szerint olyan elhelyezéseket keresünk, amelyekre teljesül

(1) $$A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = S,$$

(2) $$A_1 + A_2 + C_1 + C_2 = S,$$

(3) $$B_1 + B_2 + D_1 + D_2 = S,$$

(4) $$C_1 + C_2 + D_1 + D_2 + E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 2S.$$

Az (1) és (4) egyenletek bal oldalainak az összege az adott 12 szám összegével, $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$-cal egyenlő, emiatt $S + 2S = 78$, és $S = 26$.

Jelöljük az azonos nagy betűkkel jelölt számok összegét a megfelelő kis betűvel. Az (1) és (2) egyenletek különbsége szerint $b = c$, az (1) és (3) egyenletek különbsége szerint $a = d$. Tehát egy megfelelő elhelyezésre

(5) $$a + b = 26, \qquad a = d, \qquad b = c$$

teljesül. Ez a feltétel viszont elégséges is ahhoz, hogy egy elhelyezés megfelelő legyen, hiszen belőle (1), (2) és (3) nyilvánvalóan következnek, (4) pedig azért, mert a bal oldalán álló számok összege $a + b = 26$-tal kevesebb az adott 12 szám összegénél, vagyis ez az összeg $78 - 26 = 2 \cdot 26$. Azt fogjuk megszámolni, hány olyan elhelyezés van, amely eleget tesz (5)-nek.

Egy megfelelő elhelyezésben az azonos nagy betűkkel jelzett számok egymás között tetszőlegesen felcserélhetők, hiszen (5) csak e számok összegére jelent feltételt (ha egyáltalán jelent feltételt, az E_i számokra (5) ugyanis semmit sem követel meg). Minden megfelelő elhelyezésből az A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1,\ 2)$ számpárok felcserélésével $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ új, és továbbra is megfelelő elhelyezést kapunk, az E_1, E_2, E_3, E_4 számokat pedig 24-féleképpen rendezhetjük át. Ha ugyanis 4 különböző számot minden lehetséges sorrendben fel akarunk írni, akkor az első helyre kerülő számot 4-féleképpen választhatjuk meg közülük, a másodikat a visszamaradó 3 közül 3-féleképpen, a harmadikat 2-féleképpen, ezután a negyedik egyértelműen a még el nem helyezett szám lesz. A lehetőségek száma ezek szerint valóban $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. További két-két lehetőséget jelent, hogy az A_1, A_2 számpárt felcserélhetjük a D_1, D_2 számpárral, a B_1, B_2 párt pedig a C_1, C_2 számpárral.

Válasszuk meg például a számok elhelyezését úgy, hogy az azonos nagy betűvel jelzett számok között mindig a nagyobb indexű legyen nagyobb, továbbá teljesüljön még, hogy $A_1 < D_1$, $B_1 < C_1$. A mondott átrendezésekkel minden megfelelő elhelyezésből ilyen, ennek a kiegészítő feltételnek is eleget tevő elhelyezésre juthatunk; és minden, ennek a kiegészítő feltételnek is eleget tevő elhelyezésből $2^4 \cdot 24 \cdot 2^2 = 2^9 \cdot 3$ további, megfelelő elhelyezést kapunk. Ha tehát a kiegészítő feltétel mellett az elhelyezések száma k, akkor az összes megfelelő elhelyezés száma $2^9 \cdot 3 \cdot k$. Mivel az Árpád állításában szereplő 8768 egyenlő $2^6 \cdot 137$-tel, Árpád szerint k értéke $2 \cdot 137 = 274$. Látni fogjuk, hogy k értéke ennél valamivel kevesebb, Árpád valószínűleg k meghatározásánál követett el hibát.

II. Rátérünk k meghatározására, ezt a lehetséges értékei szerinti esetszétválasztással végezzük el. Mivel a-t kétféleképpen is elő kell tudnunk állítani különböző számaink összegeként, a legkisebb lehetséges értéke 5. Ekkor $A_1 = 1$, $A_2 = 4$, $D_1 = 2$, $D_2 = 3$ az egyetlen, a kiegészítő feltételnek is eleget tevő megoldás, és a B_i, C_i változók értéke is egyértelműen meghatározott.

Az $a = 6$ esetben is két lehetséges felbontás van: $5 + 1$ és $4 + 2$, és csak két lehetséges felbontása van a $b = 20$ számnak is, ismét 1 megoldás van. (a és $b = 26 - a$ mindig ugyanannyiféleképpen állítható elő $2 - 2$ különböző, az előírtak közül választott számból, hiszen ha $a = x + y$, akkor $b = 26 - a = (13 - x) + (13 - y)$ és pl. x-szel együtt $(13 - x)$ is az előírt számok közé tartozik.)

Ha $a = 7$, a felbontások: $6 + 1$, $5 + 2$, $4 + 3$; a $b = 19$ szám felbontásai pedig $12 + 7$, $11 + 8$, $10 + 9$. Mivel a és b felbontásai közt csupa különböző számok lépnek fel, bárhogy választunk ki e $3 - 3$ felbontás közül kettőt-kettőt, megfelelő elhelyezést kapunk, a lehetőségek száma tehát $3 \cdot 3 = 9$. (Három elem közül ugyanis 3-féleképpen választhatunk ki kettőt, hiszen a kiválasztást meghatározza, hogy melyiket *nem* választjuk ki, és erre 3 lehetőségünk van.)

Ha $a = 8$, akkor $8 = 7+1 = 6+2 = 5+3$ és $b = 18 = 12+6 = 11+7 = 10+8$, de az $a = 1+7$ felbontás mellé nem választhatjuk a $b = 7+11$ felbontást és $(2+6)$ mellé a $(6+12)$-t (táblázatunkon az egymást kizáró párokat vonallal kötöttük össze). Kell tehát, hogy a egyik felbontása $(3+5)$, b egyik felbontása $(8+10)$ legyen, ezek mellé a második felbontását 2-féleképpen választhatjuk és mindegyik esetben egyértelmű, hogy mi a b másik felbontása. A megoldások száma innen $2 \cdot 1 = 2$.

$$\begin{array}{llll}
a=8: & 1+7 & 2+6 & 3+5 \\
 & | & | & \\
b=18: & 7+11 & 6+12 & 8+10
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
a=9: & 1+8 & 2+7 & 3+6 & 4+5 \\
 & | & | & | & | \\
b=17: & 8+9 & 7+10 & 6+11 & 5+12
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
 & \text{I.} & & & & \text{II.} & & & & \text{III.} & & & & \text{IV.} \\
a=10: & 1+9 & & & & 3+7 & & & & 4+6 & & & & 2+8 \\
 & & \diagdown & & \diagup & & & & \diagup & & \diagdown & & & \\
b=16: & & & 9+7 & & & & 4+12 & & & & 6+10 & & 5+11
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccccccccc}
 & \alpha & & & & \alpha & & & & \alpha & & & & \beta & & & & \beta & & \\
a=11: & 1+10 & & & & 5+6 & & & & 2+9 & & & & 3+8 & & & & 4+7 & & \\
 & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
b=15: & & & 5+10 & & & & 6+9 & & & & 3+12 & & & & 7+8 & & & & 4+11 \\
 & \alpha & & & & \alpha & & & & \alpha & & & & \beta & & & & \beta & & \\
a=12: & 1+11 & & & & 3+9 & & & & 5+7 & & & & 2+10 & & & & 4+8 & & \\
 & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
b=14: & & & 3+11 & & & & 5+9 & & & & 2+12 & & & & 4+10 & & & & 6+8
\end{array}$$

Ha $a = 9$, négy lehetséges felbontás van, ezek mindegyike a $b = 17$ felbontásai közül egyet zár ki, amint táblázatunk mutatja. Bárhogy választunk ki tehát a négy lehetséges felbontása közül kettőt, b felbontásai közül csak az általuk ki nem zárt másik kettőt választhatjuk. A lehetőségek száma tehát annyi, ahányféleképpen a-nak 4 lehetséges felbontása közül kettőt kiválaszthatunk. A lehetőségek – a felbontásokat I, II, III, IV-gyel jelölve: I–II, I–III, I–IV, II–III, II–IV, III–IV, tehát 6 lehetséges párosítás van.

$a = 10$-nek is 4 felbontása van, ezek közül kettő (jelöljük őket I-gyel és II-vel) a $b = 16$-nak ugyanazt a felbontását zárja ki, egy harmadik (jelöljük III-mal) két felbontást is kizár, egy (a IV) pedig nem zár ki egyet sem. A III mellé csak IV-et vehetjük párnak, ekkor b két felbontása egyértelmű; ha IV mellé I-et vagy II-t vesszük, vagy ha I-et II-vel párosítjuk, b-nek 3-féle felbontása közül választhatunk, a lehetőségek száma tehát összesen $1 + 3 \cdot 3 = 10$.

Ha $a = 11$, két független lánc alakul ki az a és b egymást kizáró felbontásaiból, a felbontásai közül az egyikben 3 van (ezeket α-típusúaknak nevezzük), a másikban 2 (ezek a β-típusúak). Ha a mindkét felbontását az α-típusúak közül választjuk ki, ezekhez b-nek 3 felbontása közül választhatunk, és az ilyen lehetőségek száma $3 \cdot 3 = 9$. Egy α és egy β típusú felbontást választva a-hoz csak akkor kapunk megoldást, ha olyan α-típusút választunk, amelyik b-nek csak egy felbontását zárja ki; ekkor b megfelelő felbontása egyértelműen meghatározott. Így $2 \cdot 2 = 4$ esetet kapunk, végül 1 megoldást ad a két β-típust felbontás választása, ezek együtt $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 14$ megfelelő felbontást jelentenek.

$a = 12$ esetén ugyanígy két független és az előbbiekkel egyenlő szerkezetű lánc alakul ki, a megoldást adó felbontások száma itt is 14. Az $a > 13$ eseteket rendre visszavezethetjük a már tárgyalt esetekre (a és b szerepének a felcserélésével), ezeket összefoglalva mutatja be az alábbi táblázat:

a	5	6	7	8	9	10	11	12
(b)	21	20	19	18	17	16	15	14
a megoldások száma	1	1	9	2	6	10	14	14

Az eddigiek szerint az $a \neq 13$ értékekben összesen $2 \cdot 57 = 114$ megoldást találtunk.

Külön kell tárgyalnunk az $a = b = 13$ esetet. Ekkor 6 megfelelő felbontás van, ezek közül először az a felbontásaihoz választunk ki kettőt, amit $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$-féleképpen tehetünk meg (az egyes felbontásokat ismét római írású számokkal jelölve, I mellé a másik 5-öt választhatjuk, II mellé a többi 4-et – hiszen a II–I párt már számításba vettük – és így tovább, végül V mellé egyedül a VI-ot választhatjuk). A többi 4-ből választhatjuk ki b két felbontását, amit (mint azt az $a = 9$ esetnél láttuk) 6-féleképpen tehetünk meg; így az összes megoldás száma $a = 13$ mellett $15 \cdot 6 = 90$, minden a értékre együtt $k = 90 + 114 = 204$, és az elhelyezési lehetőségek száma $2^9 \cdot 3 \cdot 204 = 313\,344$.

Megjegyzés. Többen avval vélték bizonyítani az állítás helytelen voltát, hogy a közölt eredmény 8768-as tényezőjében szereplő 137-es prímtényező nem adódhat ki kombinálási művelet eredményeként. Ez nem helyes megokolás. A fentiekben is láttuk, hogy kombinálási lehetőségek száma nem kizárólag szorzással adódhat ki. (Lásd e szám vezető cikkét is.)par