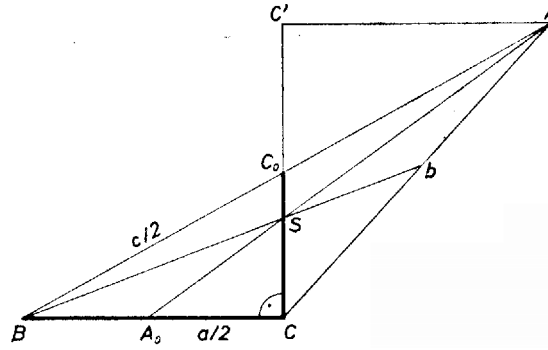


1. Legyen a kérdéses ABC háromszög tompaszögének csúcsa C és legyen az onnan induló CC_0 súlyvonala a CB oldalra merőleges (C_0 az AB oldal felezőpontja).



1. ábra

Így a C_0BC derékszögű háromszögből az oldalak és súlyvonalak szokásos jelöléseivel (1. ábra)

$$CC_0^2 = s_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2.$$

Az ABC háromszöget C_0 -ra tükrözve A és B egymásba mennek át, C képe pedig legyen C' . így $C'A \perp CB$, és a $CC'A$ derékszögű háromszögből

$$CC'^2 = 4s_c^2 = b^2 - a^2.$$

E két összefüggésből s_c kiküszöbölésével a három oldal között egyszerű összefüggés adódik:

$$(1) \quad c^2 = 3a^2 + b^2, \quad \text{másképpen} \quad 3a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

2. Legyen még BC felezőpontja A_0 , és az ABC háromszög súlypontja S . Így $SA_0 = AA_0/3 = s_a/3$, és $SB = 2s_b/3$, $SC = 2s_c/3$, és az SCA_0 , SCB derékszögű háromszögekből:

$$CA_0^2 = \frac{a^2}{4} = \frac{s_a^2}{9} - \frac{4s_c^2}{9},$$

$$CB^2 = a^2 = \frac{4s_b^2}{9} - \frac{4s_c^2}{9}.$$

Ezekből a kiküszöbölése útján kapunk összefüggést a súlyvonalak között:

$$(2) \quad 3s_c^2 = s_a^2 - s_b^2, \quad \text{másképpen} \quad s_a^2 - s_b^2 - 3s_c^2 = 0.$$

A talált (1) összefüggés különböző együtthatói szerint a tompaszöggel szemben fekvő c oldal, a súlyvonalra merőleges a oldal és b , a harmadik oldal az összefüggésben megkülönböztetett szerepet kapott, és ugyanez mondható a súlyvonalak (2) összefüggésére.

Megjegyzések. 1. Bizonyításunk szerint (1) és (2) szükséges feltételei annak, hogy SC és CB merőlegesen álljanak egymásra. Könnyű megmutatni az oldalak és súlyvonalak ismert összefüggései alapján – amelyek közül egyet-egyét ide iktatunk:¹

$$4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \quad 9c^2 = 8s_a^2 + 8s_b^2 - 4s_c^2,$$

hogy a feltételek elegendők is ahhoz, hogy a kérdéses merőleges állás bekövetkezzék. – Minthogy a feladat eredetileg versenyfeladat volt és a versenyek munkaideje kötött, a feladat a megfordítást nem kérdezte.

2. A kapott (1) és (2) összefüggések hasonlósága (ami még jobban látszik, ha (2)-t

$$s_a^2 = 3s_c^2 + s_b^2$$

alakban írjuk), arra utal, hogy a súlyvonalakból mint oldalakból szerkesztett háromszögnek is megvan ugyanaz a tulajdonsága, mint az eredeti háromszögnek. Valóban, ha a $C'S$, AS szakaszok felezőpontját D -vel, illetve E -vel jelöljük, az ADS háromszögben

$$DS = \frac{2}{3} s_c, \quad AD(=BS) = \frac{2}{3} s_b, \quad AS = \frac{2}{3} s_a,$$

tehát ez a háromszög hasonló a súlyvonalakból mint oldalakból szerkeszthető háromszöghöz, benne D -nél tompaszög van, és a DE súlyvonal merőleges a DS oldalra. (Ezzel természetesen (2)-re is újabb bizonyítást adtunk.)

¹ Az elsőt legutóbb az 1772. feladatban használtuk, K. M. L. 44 (1972) 10 – 11. oldal; a második úgy adódik, hogy felírjuk hasonlóan $4s_a^2$ -et és $4s_b^2$ -et és a három egyenletből álló rendszert megoldjuk a^2 -re, b^2 -re, c^2 -re mint ismeretlenekre.

