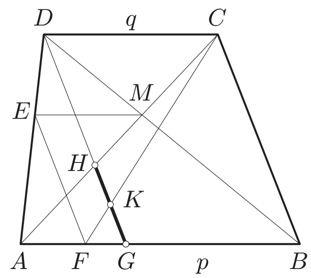
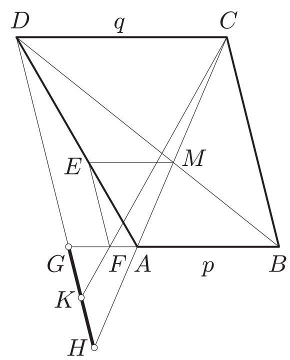
I. megoldás. Jelöljük a CF, DG (azaz HG) egyenesek metszéspontját K-val, a trapéz szemben fekvő A, C és B, D csúcspárjait összekötő egyenesek metszéspontját M-mel, továbbá legyen $AB = p$ és $DC = q$. A $p = q$ esettel nem kell foglalkoznunk, mert $p = q$ mellett, és ha még az $ABCD = T$ trapéz konvex (azaz paralelogramma), az F, G és H pontok mindegyike az A csúcsban adódik, tehát az állítás semmitmondó; ha pedig $p = q$ és T hurkolt (vagyis az $ABDC$ körüljárás adna paralelogrammát), akkor az M metszéspont nem létezik. Az alakzatot konvex trapéz esetére az 1a és 1b ábrák, hurkolt trapéz esetére a 2a és 2b ábrák szemléltetik a $p > q$, illetve $p < q$ nagyságviszony mellett. Az utóbbi megkülönböztetésre amiatt van szükség, mert az alakzat előállításában és a bizonyítandó állításban az A, B, C, D csúcsok mindegyike megkülönböztetett szerepet játszik (azaz A és D, valamint B és C nem ekvivalensek).



1a. ábra



1b. ábra

A szerkesztés szerint a KGF és CBF háromszögek minden esetben hasonlók egymáshoz, úgyszintén a HGA, CBA háromszögek is. Ezek alapján

$$HG : KG = \left(\frac{AG}{AB} \cdot CB\right) : \left(\frac{FG}{FB} \cdot CB\right) = \frac{AG}{FG} : \frac{AB}{FB}, \tag{1}$$

és azt kell bizonyítanunk, hogy ennek az aránynak az értéke 2.

Mivel az ABM és CDM háromszögek hasonlók egymáshoz, azért

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AE}{ED} = \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} = \frac{p}{q}. \tag{2}$$

Konvex T esetében M az AC szakaszon van, ezért E az AD szakaszon, F az AG szakaszon, így $AG = AF + FG = |p - q|$, ezért (2) alapján

$$AF = \frac{p}{p+q} \cdot AG, \quad FG = \frac{q}{p+q} \cdot AG,$$

és (1) utolsó előtti tagja céljára

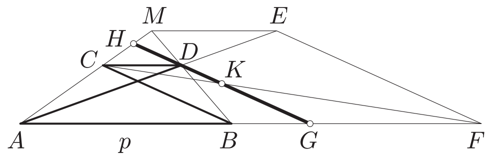
$$\frac{AG}{FG} = \frac{p+q}{q}. \tag{3}$$

Másrészt a $p > q$, illetve $p < q$ nagyságviszony szerint:

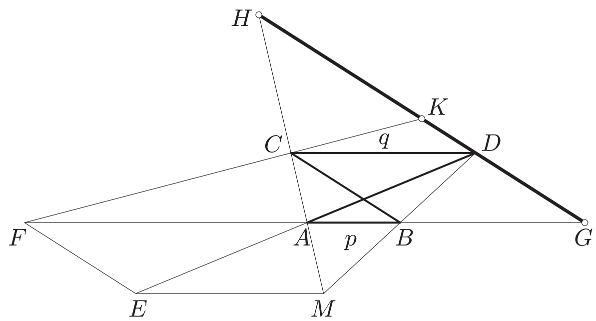
$$FB = BG \pm GF = q \pm \frac{q}{p+q} \cdot |p - q|,$$

és mivel rendre $|p - q| = \pm(p - q)$, azért FB, majd (1) utolsó tagja, majd (3) figyelembevételével (1) értéke mindkét nagyságviszony esetére

$$FB = \frac{2pq}{p+q}, \qquad \frac{AB}{FB} = \frac{p+q}{2q}, \qquad \frac{HG}{kG} = 2.$$



2a. ábra



2b. ábra

Hurkolt T esetében az M, E, F pont rendre az AC, AD, AG szakasz valamelyik meghosszabbításán van: $AG = |AF - FG|$, éspedig $p < q$ esetén az A-n túli meghosszabbításon, $p > q$ esetén a másikon. (2) alapján

$$AF = \frac{p}{|p-q|}\ AG, \qquad FG = \frac{q}{|p-q|}\ AG, \qquad \frac{AG}{FG} = \frac{|p-g|}{q} = \frac{\pm(p-q)}{q}$$

aszerint, hogy $p \gtrless q$. Másrészt $FB = FG \pm GB$, továbbá mindenképpen $AG = p+q$. így

$$FB = \frac{q(p+q)}{\pm(p-q)} \pm q = \frac{2qp}{\pm(p-q)},$$

és ezekből a konvex T esetéhez hasonlóan $HG : KG = 2$.

Ezzel az állítást minden szóba jövő esetre bebizonyítottuk.

II. megoldás. Jelöljük az $\overrightarrow{AB}$ vektor irányába mutató egységvektort $\mathbf{e}$-vel, az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszát p-vel: $\overrightarrow{AB} = p\mathbf{e}$. Mivel a $\overrightarrow{DC}$ vektor párhuzamos $\overrightarrow{AB}$-vel, $\overrightarrow{DC}$ is skalárszorosa $\mathbf{e}$-nek: $\overrightarrow{DC} = q\mathbf{e}$. Ez a q negatív is lehet, ha ugyanis az $ABCD$ négyszög hurkolt, akkor $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ ellentétes irányúak. Legyen még $\overrightarrow{AE} = x \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EM} = y\mathbf{e}$, első lépésként ennek az x és y számnak az értékét határozzuk meg.

Jelöljük az AC, BD átlók metszéspontját M-mel. Mivel M rajta van az AC egyenesen, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM}$ az $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$-nek egy u skalárszorosa, azaz

$$\overrightarrow{AM} = u \cdot \overrightarrow{AC}, \qquad x \cdot \overrightarrow{AD} + y \cdot \mathbf{e} = u \cdot \overrightarrow{AD} + uq\mathbf{e}.$$

A nem párhuzamos $\mathbf{e}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokkal minden vektort egyértelműen állíthatunk elő, tehát $u = x$, és $y = uq = qx$. Mivel másrészt M rajta van a BD egyenesen, azért a $\overrightarrow{BM}$ a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$-nak egy v skalárszorosa:

$$\overrightarrow{BM} = v \cdot \overrightarrow{BD}, \quad \text{azaz} \quad -p\mathbf{e} + x \cdot \overrightarrow{AD} + y\mathbf{e} = v \cdot \overrightarrow{AD} - vp\mathbf{e},$$

amiből $v = x$ és $y = p(1-x)$ következik. Tehát

$$x = \frac{p}{p+q}; \qquad y = \frac{pq}{p+q},$$

feltéve, hogy $p + q \neq 0$, különben ugyanis $AC||BD$, és M nem jön létre. – A szerkesztés szerint $EF||DG||BC$, emiatt

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = (p = q)\mathbf{e},$$
$$\overrightarrow{AF} = x \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{p(p-q)}{p+q}\mathbf{e},$$
$$\overrightarrow{FG} = (1-x)\overrightarrow{AG} = \frac{q(p-q)}{p+q}\mathbf{e}.$$

Jelöljük a H-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesnek CF-en és CG-n levő pontjait J-vel és L-lel, ekkor $\overrightarrow{HL}$ azt a szerepet játssza a $(p-q)$ és q alapokkal bíró $AGCD$ trapézban, mint $\overrightarrow{EM} = y\mathbf{e}$ az $ABCD$-ben, így

$$\overrightarrow{HL} = \frac{(p-q)q}{(p-q)+q}\mathbf{e},$$

és $\overrightarrow{AF} = x \cdot \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{HJ} = x \cdot \overrightarrow{HL}$ miatt ebből

$$\overrightarrow{HJ} = \frac{(p-q)q}{p+q}\mathbf{e} = \overrightarrow{FG}$$

következik. Tehát $FGJH$ paralelogramma, és az FJ átló felezi GH-t, amint azt bizonyítani kellett.