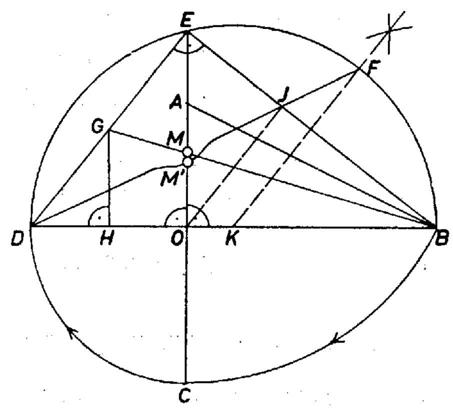
I. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a sejtés igaz. Ehhez néhány további jelölést vezetünk be: BD felezőpontja K, a G vetülete OB-n H, az OE egyenes metszéspontja DF-fel M', BG-vel M (1. ábra),



és azt mutatjuk meg, hogy M' azonos M-mel. Ehhez, mivel M és M' az OB-nek ugyanazon oldalán vannak, mint már G és F is, elég belátni, hogy $OM'=OM$. Előre megjegyezzük, hogy a számítás során, a szerkesztésből adódóan ismételten derékszögű háromszögeket használunk fel, köztük két hasonló párt; rövidség kedvéért ezeket újra nem említjük.

A megindulásban $OB=2\cdot OA$ alapján $AB=AC=\sqrt{5}\cdot OA$, ezért $OD=OC=(\sqrt{5}-1)OA$, továbbá $DB=DO+2\cdot OA=(\sqrt{5}+1)OA$, tehát $DE=\sqrt{DO\cdot DB}=2\cdot OA=OB$. Ezek alapján

$$OM = HG\cdot\frac{OB}{HB}=\frac{OE}{2}\cdot\frac{2\cdot OA}{OH+OB}=OE\cdot\frac{2\cdot OA}{OD+4\cdot OA}=OE\cdot\frac{2}{\sqrt{5}+3}=$$
$$=OE\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Az EF, FB ívek egyenlősége alapján DF felezi a BDE szöget, ezért a DOE háromszögből

$$OM'=OE\cdot\frac{DO}{DO+DE}=OE\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=OM,$$

amint azt bizonyítani akartuk.

II. megoldás. *Előzetes megjegyzés.* A sejtés kimondható így is: a leírt módon megszerkesztett DBE derékszögű háromszögben a DB átfogó egyik végpontjából induló súlyvonal és a másik végpontból induló szögfelező az átfogóra merőleges magasságon metszik egymást. Ebből az egyszerű kimondásból kimaradt a kiindulási $OB=2\cdot OA$ kapcsolat tetszetőssége, de vele a 3 lépéses szerkesztés hosszadalmassága is. Az utóbbi helyett tetszetős, rövid föltevéssel kezdhetnénk: ha egy derékszögű háromszögben az átfogóra merőleges magasság az átfogót $DO:OB=(\sqrt{5}-1):2$ arányban osztja részekre, akkor a mondott három vonal egy pontban metszi egymást. Így viszont a megadott arány irracionális értéke hat mesterkélten. Avégett, hogy ezt is elkerüljük, az arány értékét tesszük meg kérdésnek, a tetszetős, bizonyítandó állítást pedig föltevésnek, és ezt tekintjük feladatunknak:

Egy derékszögű háromszögben az átfogó egyik végpontjából induló súlyvonal és a másik végpontjából induló szögfelező az átfogóra merőleges magasságon metszik egymást. Milyen arányú részekre osztja az átfogót a magasság?

Tegyük föl tehát, hogy a BDE derékszögű háromszögben a DJ szögfelező és EO magasság M metszéspontját B-vel összekötő egyenes a DE oldalt annak G felezőpontjában metszi. Ekkor a Gy. 1388. gyakorlat I. megoldásában[1] látott segédtételt a $DOJE$ négyszögre alkalmazva, $OJ||DE$, majd a szögfelező tétel alapján a kérdéses arány:

$$\lambda=\frac{DO}{OB}=\frac{EJ}{JB}=\frac{DE}{DB}.$$

Másrészt, mivel háromszögünk derékszögű,

$$DE^2=DO\cdot DB, \tag{1}$$

ezeket egybevetve

$$DE^2=OB\cdot DE,\quad \text{tehát}\quad DE=OB,$$

és ezt írva (1)-be majd osztva OB^2-nel:

$$OB^2=DO\cdot DB=DO(DO+OB)$$
$$1=\frac{DO}{OB}\left(\frac{DO}{OB}+1\right)=\lambda(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda,$$

[1] Lásd K. M. L. 47 (1973) 12. old.

és mivel λ pozitív, azért

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

A mondottak megfordíthatók, ebből újabb bizonyítás adódik az eredeti feladatra.

Megjegyzések. 1. A feladat általánosításához jutunk, ha a tetszőleges AOB háromszögben $OB = a$, $BA = c$, $AO = b$ jelöléssel fennáll $a(a+b-c) = (b-c)^2$, és a Thalész-kör helyett a $(180^\circ - AOB)\sphericalangle$ nyílású látókörívet vesszük. Ez a derékszögű eset gondolatmenete szerint bizonyítható.

2. Ajánljuk az olvasónak, vizsgálja végig azt a módosítást, ha AB-t A körül az OA félegyenesre fordítva képezzük C-t, majd OC-t O körül a BO félegyenesre fordítjuk.

III. megoldás. Az eredeti állítást Ceva tétele[2] alapján – bizonyítjuk, ezt a DBE háromszögre alkalmazva. Mivel a tétel megfordítható, kimondjuk, hogy a három hányados szorzatáról mutatjuk meg, hogy 1-gyel egyenlő. Jelöljük a BE és DF egyenesek metszéspontját J-vel, ekkor DG és GE egyenlősége alapján elég ezt megmutatnunk:

$$\frac{DO}{OB} \cdot \frac{BJ}{JE} = 1.$$

Az első arány értékét már ismerjük az I. megoldásból, a másodiké pedig a szögfelezés alapján

$$\frac{BJ}{JE} = \frac{BD}{DE} = \frac{BD}{OB},$$

tehát a szorzat valóban

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)+2}{2} = 1.$$

Megjegyzés. A legutóbbiakat így is mondhatjuk: $DO \cdot BD = OB^2$, $BD : BO = BO : DO$, O az aranymetszés arányában osztja ketté a BD szakaszt.

[2]Az $A_1A_2A_3$ háromszög A_1A_2, A_2A_3 és A_2A_1 oldalegyenesének egy-egy pontját rendre B_3-mal, B_1-gyel, B_2-vel jelölve, az A_iB_i egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy ponton (ami lehet végtelen távoli is), ha

$$\frac{A_1B_2}{B_3A_2} \cdot \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_1} = 1.$$

A tétel más megfogalmazása az iskolai függvénytáblázatban 322.4. jelzőszám alatt is megtalálható.