a) Az egy-egy sorba beírt négy szám szorzatát P-vel jelölve a felhasználandó 16 szám szorzata P^4, eszerint úgy kell kiválasztanunk a 30 közül a 16 számot, hogy törzstényezős alakjukból szorzatuknak ugyancsak a törzstényezős alakját felírva, minden egyes törzsszám kitevője osztható legyen 4-gyel. Emiatt nem fordulhat elő, P^4-ben 11 és nála nagyobb törzsszám, tehát 11, 22, 13, 26, 17, 19, 23, 29 nem választható ki.

A további 22 szám szorzata $Q = 2^{24} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4$. Fordítsuk figyelmünket az 5-ös törzsszámra, ennek kitevőjét vagy 4-re vagy 0-ra kell leszállítanunk a még kihagyandó 6 szám révén, és így magában P-ben csak 1 vagy 0 lehet az 5 kitevője. Ezért mindenképpen mellőzendő a $25 = 5^2$, továbbá az 5, 10, 15, 20 és 30 közül vagy egyikük vagy mind az öt. Az utóbbi eset mindjárt megfelelő kiválasztás, mert e 6 szám szorzata $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^7$, így P^4-re $2^{20} \cdot 3^{12} \cdot 7^4$ marad és $P = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$. Az első eset pedig megvalósítható például úgy, hogy előbb kihagyjuk a 7-tel osztható számokat – ekkor az eddig kihagyott öt szám szorzatával osztva Q-t, a hányados $2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$ –, utolsó elhagyandónak a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ számot vesszük, és ekkor $P^4 = 2^{20} \cdot 3^{12} \cdot 5^4$, $P = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$. Egy más lehetőség, hogy (a 7-tel oszthatók helyett) a 8, 9, 16 és 27 számokat mellőzzük, ekkor $P = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. (Nem kell előállítanunk minden lehetőséget!) Eszerint három kiválasztási lehetőséget is találtunk a felhasználandó 16 számra:

(I.) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 27, 28;
(II.) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 27;
(III.) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 28;
a (II.) csak abban különbözik az (I.)-től, hogy a 7-es tényezők helyén 5-ös áll.

b) úgy érezzük, hogy az (I.) számkészletből ($P = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$) legkényesebb a 3-as tényezők elhelyezése, ugyanis a $27 = 3^3$-nel egy sorba és egy oszlopba nem kerülhet 3 többszöröse. Van még 2 olyan számunk, melyben a kitevő 2, és 5 olyan, amelyben 1. Sikert sejtet, hogy e kitevők elhelyezhetők a 4 sorban és 4 oszlopban úgy, hogy összegük mindenütt 3 (az üres helyekre 0-t írtunk, 1. ábra). Hasonlóan 1, 2, 3, 4 darab számunkban a 2-es törzsszám kitevője rendre 4, 3, 2, ill. 1, ezekből a 2. ábra szerint lehet mind a 8 vonalon 5-öt kihozni összegül, az elrendezést döntően befolyásoló számokat vastag számjegyekkel írtuk. Az utóbbi ábrán a 3. oszlopot a többiek elé, majd a 3. sort a többiek alá toltuk, az így kapott számelrendezést írtuk a 3. ábra megfelelő helyein a 2-es törzsszám kitevőjének, az 1. ábra számait hasonlóan a 3-as törzsszám kitevőjének és ahol mindkét ábrán 0 áll, oda 1-est írtunk be. Ebben az állapotban két-két mezőn áll 1, 2, 3 és $2^2 = 4$.

3	0	0	0
0	2	0	1
0	0	2	1
0	1	1	1

1. ábra

0	1	0	4
1	1	3	0
2	3	0	0
2	0	2	1

2. ábra

3^3	$1 \cdot 7$	2	2^4
2^3	$2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 7$	3
$2^2 \cdot 7$	2^2	3^2	$2 \cdot 3$
1	$2^2 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3$	$3 \cdot 7$

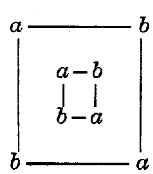
3. ábra

27	7	2	16
8	18	14	3
28	4	9	3
1	12	24	21

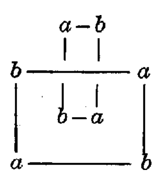
4. ábra

A két-két előfordulás közül egyik-egyik 2-féleképpen is kiválasztható úgy, hogy a kiválasztott négy szám mindegyike más sorból és más oszlopból való. Az egyik ilyen szám négyes mezőire írtuk be a 7-es tényezőket. Ebben az alakban könnyen ellenőrizhető a kívánt szorzatok egyenlősége, a 4. ábrán pedig – végeredményként – tízes rendszerbeli alakjukban írtuk a számokat. Új megoldást kapunk, ha egyidejűen fölcseréljük egymással a következő négy számpár tagjait: $(1,7)$, $(2,14)$, $(3,21)$, $(4,28)$.

c) Könnyű ellenőrizni, hogy a 3. ábra elrendezésében nem lehet a sorok és az oszlopok sorrendjét úgy cserélgetni, hogy a két átló mentén álló négy-négy szám szorzata is $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$ legyen, mert már az 1. ábra ilyen változtatásával sem lehet 3-at összegül kihozni az átlókra. Sor- és oszlopcserékkel ugyanis az 5. ábra átlós számaiból alkotott két négyzetes keret mindenesetre két téglalapba menne át – amilyenek pl. a 6. ábra szerintiek –, vagyis amelyeknek 8 csúcsa közt mindegyik oszlop és sor 2–2 számmal szerepel. Az 1. ábrán pedig nem található ilyen keret úgy, hogy a rajtuk álló kitevők összege $2 \cdot 3 = 6$ legyen.



5. ábra



6. ábra

7	18	20	2	7	$2\cdot 3^2$	$2^2\cdot 5$	2
10	4	21	6	$2\cdot 5$	2^2	$3\cdot 7$	$2\cdot 3$
3	5	12	28	3	5	$2^2\cdot 3$	$2^2\cdot 7$
24	14	1	15	$2^3\cdot 3$	$2\cdot 7$	1	$3\cdot 5$

7. ábra *8. ábra*

d) A III. számkészletből a 7. és 8. ábra olyan elrendezést mutat, amelyben a szorzatok egyenlősége (a 2, 3, 5 és 7 törzstényezők kitevői összegének egyenlősége) még a két átlón is teljesül, tehát a feladat kérdésére a válasz igenlő. Először a 7-es tényezőket helyeztük el a 8. ábrán, minden sorba, oszlopba, átlóba egyet. Az 1. sor 7-esét a bal felső sarokba téve, a 2. sorbeli 7-es csak a 3. vagy a 4. oszlopban állhat, mert a jobbra lejtő átlóban már nem állhat. A 2. sor 3. oszlopát választva, a 3. sor 7-ese már csak a 4. oszlopban lehet, a 4. soré pedig a 2. oszlopban. Ha pedig a 2. sor 7-esét a 4. oszlopba tettük volna, a talált elhelyezés tükörképét kapnók a jobbra lejtő átlóra. Ugyanilyen lehet csak az 5-ösök elosztása is, elforgatva vagy tükrözve, de 5 és 7 nem kerülhet egy mezőbe. Tovább a 18-as szám 3^2 tényezőjével és a 24-esnek 2^3 tényezőjével haladtunk, lényegében a 3. ábra szerinti próbálgatásokkal.

Benkő Zoltán (Miskolc, Földes F. Gimn., I. o. t.)
Butor Dezső (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)
Újfalussy Miklós (Pannonhalma, Bencés Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Előállítható a 8. ábra abból az észrevételből is, hogy a III. számkészletet éppen az a 16 szorzat alkotja, amelyeket akkor kapunk, ha az $\{1,2,3,4\}$ halmaz számait rendre megszorozzuk az $\{1,5,6,7\}$ halmaz számaival (9. ábra).

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
5	5	10	15	20
6	6	12	18	24
7	7	14	21	28

9. ábra

Mindig megfelelő elrendezését kapjuk III. számainak a 10. ábrából, ha egyrészt az a, b, c, d betűk helyére valamilyen sorrendben az 1, 2, 3, 4 számokat helyettesítjük, másrészt ugyanígy x, y, z, u helyére az 1, 5, 6, 7 számokat. A 10. ábrán minden egyes betű 4 előfordulása a 8. ábra 7-eseinek elrendezéséből állt elő forgatással, tükrözéssel. A 8. ábrán $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ és $x=7$, $y=6$, $z=5$, $u=1$.

ax	cy	dz	bu
bz	du	cx	ay
cu	az	by	dx
dy	bx	au	cz

10. ábra