I. megoldás. Az állítás igaz a sorozat első tagjára (az $n=0$, $m=1$ esetén adódó 3-ra), mert az valóban 2-vel kisebb a 2. tagnál (az 5-nél). Tegyük fel, hogy igaz az állítás a sorozat első k tagjára ($k \geqq 1$), vagyis az első k tag P_k szorzata valóban 2-vel kisebb a sorozat $(k+1)$-edik (vagyis az $n=k$ mellett adódó $m=2^k$ kitevőhöz tartozó)

$$a_{k+1} = 2^{2^k} + 1$$

tagjánál. Ekkor az első $(k+1)$ tag szorzata:

$$P_{k+1} = P_k \cdot a_{k+1} = (a_{k+1}-2)a_{k+1} = \left(2^{2^k}-1\right)\left(2^{2^k}+1\right) = 2^{2^{k+1}} - 1,$$

ami valóban 2-vel kisebb a sorozat $(k+2)$-edik tagjánál, vagyis az $m=2^{k+1}$ kitevőhöz tartozó (2^m+1) számnál. Feladatunk állítását ezzel minden k természetes számra bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Tetszetősnek látszik a következő bizonyítás: szorozzuk meg a

$$P_k = \left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(2^{2^{k-1}}+1\right)$$

szorzatot az 1-gyel egyenlő $\left(2^{2^0}-1\right)$ számmal. Ekkor az első tényezőt megszorozva $\left(2^{2^1}-1\right)$-et kapunk, ezzel a második tényezőt megszorozva $\left(2^{2^2}-1\right)$-et kapunk, és így tovább, az utolsó előtti tényezőt megszorozva $\left(2^{2^{k-1}}-1\right)$-et kapunk, végül ezzel az utolsó tényezőt megszorozva $\left(2^{2^k}-1\right)$-et, ami valóban egyenlő $(a_{k+1}-2)$-vel. A közben mondott „és így tovább" kötőszöveg azonban még nem bizonyítja azt, hogy „az utolsó előtti tényezőt megszorozva $\left(2^{2^{k-1}}-1\right)$-et kapunk". Ezt az állítást ugyanúgy teljes indukcióval kellene bizonyítanunk, mint ahogy a fenti megoldásban a feladat állítását teljes indukcióval bizonyítottuk: tegyük fel, hogy a j-edik tényezőről már beláttuk, hogy az előtte kapott szorzattal beszorozva $\left(2^{2^j}-1\right)$-et kapunk, akkor ezzel a most kapott számmal a $(j+1)$-edik tényezőt beszorozva

$$\left(2^{2^j}-1\right)\left(2^{2^j}+1\right) = 2^{2^{j+1}} - 1$$

lesz a szorzat értéke. Természetesen ha már kellő gyakorlatunk van a teljes indukcióval elvégezhető bizonyításokban, akkor ez a lépés elhagyható, nem kell ezt a lépést részletezni, mint ahogy nem szoktuk részletezni a megoldások más, könnyen ellenőrizhető, gondolatban könnyen elvégezhető részét sem. Például nem érezzük szükségét, hogy a fenti szorzások igazolásául az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosságra hivatkozzunk.)

II. megoldás. Végezzük el a

$$P_k = \left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(2^{2^{k-1}}+1\right)$$

szorzást a többtagú kifejezések szorzására vonatkozó „minden tagot minden taggal megszorzunk, és a kapott szorzatokat összeadjuk" szabály szerint. Olyan szorzatokat kapunk, melyek tényezői a fenti kéttagú összegek tagjaiból kerülnek ki, minden egyes kéttagúból vennünk kell valamelyik tagot: vagy a benne szereplő 2-hatványt, vagy az 1-est. E szorzatok mindegyike újra egy 2-hatvány lesz, a kitevő értéke attól függ, hogy az eredeti

$$2^0,\ 2^1,\ \ldots,\ 2^{k-1}$$

kitevők közül melyekhez tartozó 2-hatványok szerepeltek a szorzatban. Egy adott 2^h hatványt annyiszor kapunk meg, ahányféleképpen a h szám előállítható a fenti kitevők közül vett valahány kitevő összegeként. Mivel minden, 2^k-nál kisebb számnak egy és csakis egy ilyen előállítása van, az elmondottakból következik, hogy P_k egyenlő a 2 alap 2^k-nál kisebb kitevőjű hatványainak az összegével:

$$P_k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2^{k-1}} = 2^{2^k} - 1 = a_{k+1} - 2.$$

Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Ebben a meggondolásban két olyan állítás is van, amelynek a bizonyítását nem részleteztük, és e részletezés ismét teljes indukcióval volna elvégezhető. Mind a kettőnek szemléletes jelentése van a 2 alapú számrendszerben. Az, hogy minden 2^k-nál kisebb szám előállítható különböző (és k-nál kisebb kitevőjű) 2-hatványok összegeként, annak felel meg, hogy a 2 alapú számrendszerben a 2^k-nál kisebb számok legfeljebb k-jegyűek, és jegyeik között csak 0 vagy 1 szerepel. A második állítás pedig annak felel meg, hogy az a k jegyű szám, amelynek minden jegye 1-es, a 2-es számrendszerben 1-gyel kisebb annál a $(k+1)$-jegyű számnál, amelyiknek első jegye 1-es, a többi 0.