Egy N egész szám tízes rendszerbeli alakjának végén akkor és csakis akkor áll s db zérus számjegy – és előtte egy zérustól különböző jegy –, ha a szám osztható $10 = 2 \cdot 5$-nek s-edik hatványával, de az $(s+1)$-edikkel már nem osztható. Ez azt jelenti, hogy ha N-et átírjuk különböző alapú törzsszámhatványok szorzatává – közismert kifejezéssel: törzstényezős alakra bontjuk –, akkor 2 és 5 hatványkitevői közül a kisebbik éppen s, a másik legalább s. Látni fogjuk, hogy N-ként egy $n!$ alakú számot véve, elég lesz azt elérnünk, hogy az 5-ös prímtényező kitevője legyen 1971, ill. 1972.

$n!$ tényezőit növekvő rendben, 1-től sorravéve, minden 5-ik tényező osztható 5-tel, tehát magával hoz $n!$ törzstényezős alakjába 1 db 5-ös tényezőt, minden 25-ik tényező osztható $25 = 5^2$-nel, így behoz 1 további 5-öst, minden $125 = 5^3$, minden 5^4, 5^5 sorszámú tényező 1–1 további 5-öst, és így tovább. Pl. $n = 8000$-ig az 5-tel, 5^2-nel, 5^3-nel, 5^4-nel, 5^5-nel osztható számok száma rendre

$$\frac{8000}{5} = 1600, \quad \frac{8000}{25} = \frac{1600}{5} = 320, \quad \frac{320}{5} = 64, \quad \frac{64}{5} = 12, \ldots, \quad \frac{12}{5} = 2, \ldots,$$

az utolsó két osztásban a hányadosnak csak az egész részét írtuk ki, hiszen az 5-tel, 5^2-nel,... osztható szám mindig az $5, 5^2, \ldots$ tényezőből álló sorozat végén van. ($5^6 > 8000$, tehát egy tényező sem hoz be 6 db 5-öst.) Így 8000! végén a zérusok száma $1600 + 320 + 64 + 12 + 2 = 1998$, ugyanis a 2-es tényezők száma ugyanilyen meggondolással ennél nagyobbnak adódik, már a páros tényezők száma 4000.

Az 1998-as eredmény kevéssel, 27-tel több a kívánt 1971-es számnál, próbálkozzunk tehát úgy, hogy visszamegyünk pl. 100-zal, $n = 7900$-ra. Ezzel elhagyunk $100 : 5 = 20$ db 5-tel osztható számot, $20 : 5 = 4$ db 25-tel oszthatót, és mivel maga a 8000 az 5^3-nal is osztható, de 5^4-nel már nem, azért 7900! végén a zérusok száma $20 + 4 + 1 = 25$-tel kevesebb, azaz 1973, ami már csak 2-vel, ill. 1-gyel kisebb előírásunknál. Ha elhagyjuk az 5^2-nel osztható 7900-at is, a zérusok száma 2-vel esik vissza, 1971-re, és mindkét kérdésre választ kapunk:

1971 a zérusok száma, ha $n = 7899$, 7898, 7897, 7896, 7895, hiszen 7894-re visszalépve ismét 1-gyel esik, másrészt olyan n nincs, amelyre $n!$ végén a zérusok száma 1972.

Visszapillantva, $n!$-ban a 2-es tényező kitevője a talált n-ekig 7895 esetében a legkisebb, és [ ] jellel a szám egész részét jelölve:

$$\left[\frac{7895}{2}\right] = 3947 > 1971.$$

Máthé Sarolta (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Kanyó Mária (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Vázolunk egy utat, melyen haladva kevesebb próbálgatással jutunk eredményre. A fenti meggondolás szerint, n-ként 5-nek egy k pozitív egész kitevős hatványát véve, az $n!$-ba addig bejött 5-ös tényezők (és végső zérus számjegyek) száma kifejezhető k-val:

$$\frac{5^k}{5} + \frac{5^k}{5^2} + \frac{5^k}{5^3} + \ldots + \frac{5^k}{5^k} = \frac{5^k - 1}{4}, \tag{1}$$

ez teljes indukcióval könnyen bizonyítható.

5^k után a fenti meggondolás $5, 5^2, \ldots, 5^k$ db egymás utáni tényezőből álló sorozatainak mindegyike elölről kezdődik, ezért kézenfekvő – belátását az olvasóra hagyjuk –, hogy n-et az 5-ös számrendszerben gondoljuk felírva:

$$n = j_m \cdot 5^m + j_{m-1} \cdot 5^{m-1} + \ldots + j_1 \cdot 5 + j_0,$$

ahol j_i-vel a számjegyeket jelöltük, $1 \le j_m \le 4$, és $0 \le i \le m-1$ esetén $0 \le j_i \le 4$. Ekkor $n!$-ban 5 kitevője kifejezhető n-nel és a j jegyek összegével, (1)-et k helyén az $m, m-1, \ldots, 1, 0$ értékekre alkalmazva.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek a Matematikai Társulat 1925. évi Eötvös Loránd-versenye 2. feladatának tanulmányozását.[1]

[1] *Kürschák József – Hajós György – Neukomm Gyula – Surányi Járnos:* Matematikai versenytételek, I. rész (1894–1928. évi versenyek), 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1965, 124. old.