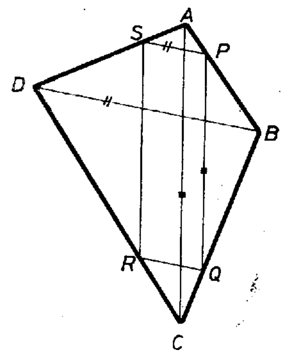
I. megoldás. Jelöljük az adott négyszög csúcsait A, B, C, D-vel, és legyen P az AB szakasz tetszőleges pontja. A P-n át AC-vel, illetve BD-vel párhuzamosan húzott egyenes metszi a BC, illetve AD szakaszt, jelöljük a metszéspontokat Q-val, ill. S-sel, a Q-n átmenő, BD-vel párhuzamos egyenes és a CD szakasz metszéspontját jelöljük R-rel (1. ábra).



1. ábra

Megmutatjuk, hogy P, Q, R, S egy paralelogramma csúcsai.

Mivel a PS, QR oldalak a szerkesztés szerint párhuzamosak, elég azt megmutatnunk, hogy egyenlőek is. Az AC, PQ egyenesekre alkalmazva a párhuzamos szelők tételét:

$$AP : AB = CQ : CB.$$

A bal oldalon álló arány az ABD, APS háromszögek hasonlósága alapján egyenlő a $PS : BD$ aránnyal, a jobb oldali pedig (a BCD és QCR háromszögek hasonlósága alapján) egyenlő a $QR : BD$ aránnyal, tehát PS és QR valóban egyenlőek.

Kérdés mármost, hogyan kell a P pontot megválasztani, hogy $PQRS$ rombusz legyen. Fenti megoldásunkhoz hasonlóan

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{BD \cdot AP}{AB} : \frac{AC \cdot PB}{AB} = \frac{AP}{PB} : \frac{AC}{BD},$$

eszerint PS és PQ akkor és csakis akkor egyenlőek, ha

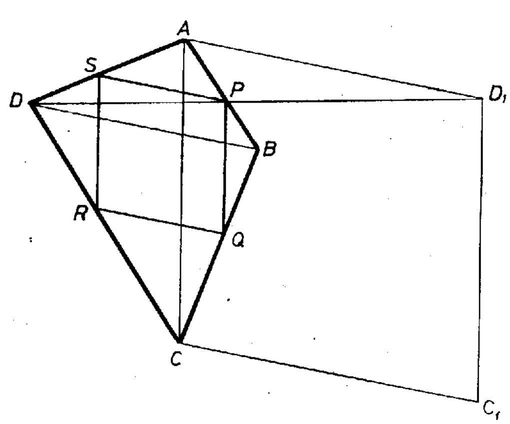
$$AP : PB = AC : BD, \tag{1}$$

vagyis ha a P pont olyan szakaszokra bontja az AB szakaszt, melyek hosszának aránya egyenlő a négyszög átlóinak az arányával.

Ezt a P pontot többféleképpen megszerkeszthetjük. Mérjük fel például az A-n átmenő, BD-vel párhuzamos, az AC egyenes B-t tartalmazó oldala felé induló félegyenesre az AC szakaszt, és a kapott D_1 pontot kössük össze D-vel. Ekkor a DD_1 egyenes a keresett P pontban metszi az AB szakaszt, hiszen

$$AP : PB = AD_1 : BD = AC : BD.$$

P-ból kiindulva a fent leírt lépésekkel kapjuk a követelménynek megfelelő rombuszt (2. ábra).



2. ábra

Lánczi Katalin (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Prőhle Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Azt mondtuk fentebb, hogy a P-n átmenő, AC-vel párhuzamos egyenes metszi a BC szakaszt. Valóban, az ABC háromszög AB oldalszakaszának tetszőleges pontján átmenő tetszőleges egyenes metszi a másik két oldalszakasz valamelyikét. A mi egyenesünk viszont nem metszheti az AC egyenest, hiszen párhuzamos vele, így metszenie kell a BC szakaszt.

2. Felhasználtuk, hogy az (1) összefüggés egyértelműen meghatározza a P pont, helyzetét. Valóban, ha P_1 és P_2 az AB szakasz különböző pontjai, és – mondjuk – P_1 az AP_2, szakaszon van, akkor $AP_1 < AP_2$, $P_1B > P_2B$, tehát

$$\frac{AP_1}{P_1B} < \frac{AP_2}{P_2B}.$$

Eszerint legfeljebb egy pontra teljesülhet (1). Azt viszont láttuk, hogy van olyan pont, melyre (1) teljesül.

3. Meg lehet mutatni, hogy a beírt rombusz oldala feleakkora, mint a két átló harmonikus középarányosa. (Az a és b pozitív számok (szakaszok) harmonikus közepe $h = 2ab/(a + b)$.)

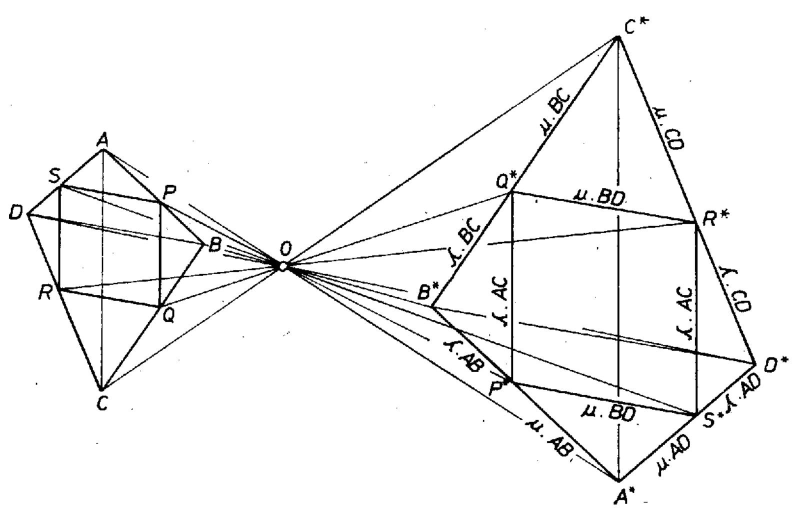
II. megoldás. Tegyük fel, hogy $PQRS$ a keresett rombusz. Nagyítsuk ki ezt D-ből mint centrumból úgy, hogy S csúcsa A-ba kerüljön, ekkor R a C-be kerül, a P, Q csúcsok új helyzetét pedig jelöljük D_1-gyel, C_1-gyel. A kapott AD_1C_1C rombuszt megszerkeszthetjük, hiszen, AC oldala adott, AD_1 oldala pedig párhuzamos a BD átlóval. Az így szerkesztett rombuszból D centrumú alkalmas kicsinyítéssel kapjuk a keresett rombuszt (2. ábra).

Szerkesztésünk helyességét nem bizonyítjuk, hiszen az – mint könnyel látható – lényegében azonos az I. megoldásban adott szerkesztéssel.

Megjegyzés. Noha a II. megoldásban ugyanazt a szerkesztést kaptuk, mint az I.-ben, e kettőt mégis különböző megoldásnak tekintjük, hiszen egy szerkesztési feladat megoldása nem csak a szerkesztés leírásából áll, hanem a szerkesztést előkészítő elemzésből, és a szerkesztés helyességének a bizonyításából. – Előre felhívjuk az érdeklődők figyelmét a pontversenyen kívül közölt 80. probléma megoldására, melyben *maga a szerkesztés* egyetlen lépésből fog állni, a feladat *megoldása* viszont alapos megfontolást igényel.

III. megoldás (vázlat). A feladatot megfordítjuk: felveszünk tetszés szerint egy olyan $P^*Q^*R^*S^*$ rombuszt, melynek oldalai párhuzamosak az adott $ABCD = N$ négyszög AC, BD átlóival, ennek köréje írunk egy $A^*B^*C^*D^* = N^*$ négyszöget, melynek oldalai rendre párhuzamosak N egymás utáni oldalaival, végül az N^*-nak és N-nek O hasonlósági középpontját a P^*, Q^*, R^*, S^* pontokkal összekötő egyenesek által N megfelelő oldalait metszve, kijelöljük a keresett $PQRS$ rombusz csúcsait.

Avégett, hogy O az ábra belsejébe, N és N^* közé essék, a felvett rombusz *bal, alsó* P^* csúcsán át N-nek *jobb, felső*, AB oldalával húztunk párhuzamost, és így tovább (3. ábra).



3. ábra

Itt természetesen bizonyítani kell, hogy N^* hasonló N-hez, hiszen négyszögek esetében nem elég az egymás utáni szögek egyenlősége a hasonlósághoz. Hasonlók azonban az ACB és $P^*Q^*B^*$, az ACD és $S^*R^*D^*$, a BDA és $P^*S^*A^*$, a BDC és $Q^*R^*C^*$ háromszögpárok, és $P^*Q^*/AC = \lambda$, $P^*S^*/BD = \mu$ jelöléssel N^* oldalainak részei kifejezhetők N oldalaival (az ábrán bejegyezve). Ebből látható, hogy N^* és N megfelelő oldalainak aránya $\lambda + \mu$, így N^* bármelyik részháromszöge hasonló N megfelelő részháromszögéhez, pl. $A^*B^*C^* \triangle \sim ABC \triangle$, tehát $N^* \sim N$, O létezik, eljárásunk helyes.

Bolla Mariann (Zirc, Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján, a bizonyítással kiegészítve.