

I. megoldás. Feltesszük, hogy (1) és (2) teljesült egy bizonyos x, y, z, a értékrendszerrel, így (2) szerint az értékek egyike sem 0. Szorzatukkal szorozva (2)-t, és 0-ra redukálva, tovább alakítva

$$(3) \quad az(y+x) + axy - xyz = az(a-z) + xy(a-z) = (a-z)(az+xy) = 0,$$

ugyanis az első alakban zárójelbe tett összeg (1) alapján egyenlő $a-z$ -vel.

Az utolsó alak második tényezőjében $z-t$ ismét (1) alapján kiküszöbölve, a tényezőt szorzattá alakíthatjuk:

$$az + xy = a(a-x-y) + xy = a^2 - (x+y)a + xy = (a-x)(a-y),$$

és evvel (3) így alakul:

$$(4) \quad (a-z)(a-x)(a-y) = 0,$$

tehát a 3 tényező közül legalább egynek 0 az értéke és ez bizonyítja az állítást.

Megjegyzések. 1. A végzett ekvivalens átalakításokat fordított sorrendben végezve látható, hogy az állítás megfordítható: ha (1) és (2) közül az egyik teljesül, továbbá x, y, z közül legalább az egyik egyenlő a -val, azaz teljesül (4), végül x, y, z és a egyike sem 0 (amit csak akkor kell mondani, ha (1)-ről tudjuk, hogy teljesül), akkor (1) és (2) másik egyenlősége is teljesül.

2. Legföljebb kettő lehet a -val egyenlő x, y és z közül, mert ha pl. $a-z = a-x = 0$, azaz $x = z = a \neq 0$, akkor (1) alapján $y = -a$ és $a-y = 2a \neq 0$.

II. megoldás. Ismét feltesszük, hogy (1) és (2) teljesül egy bizonyos x, y, z, a értékrendszerrel, és tekintjük azt a harmadfokú egyenletet, melynek a gyökei az x, y, z számok:

$$(U-x)(U-y)(U-z) = 0.$$

A gyökök és együtthatók ismert összefüggései¹ alapján (vagy közvetlenül, a beszorzást elvégezve) látható, hogy ez az egyenlet

$$U^3 + pU^2 + qU + r = 0$$

alakban is felírható, ahol

$$p = -(x+y+z), \quad q = xy + yz + zx, \quad r = -xyz.$$

Itt (1) szerint $p = -a$, és (2) szerint $-q/r = 1/a$, azaz $r = -aq$, így egyenletünk újabb lehetséges alakja

$$U^3 - aU^2 + qU - aq = U^2(U-a) + q(U-a) = (U^2+q)(U-a) = 0.$$

(1) és (2) felhasználása alapján ennek az x, y, z számok a gyökei. Az újabb szorzattá alakítás szerint viszont az $U = a$ érték is gyök. Ez csak úgy lehet, ha a egyenlő az x, y, z számok egyikével.

¹Lásd pl. *Hack Frigyes*: Függvénytáblázatok, matematikai összefüggések, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 60. old. 251. 331-334. jelzőszámú összefüggések.