Előzetes megjegyzés. Elsőként olyan megoldást közlünk, amely sokkal többre válaszol, mint amennyit a feladat kérdez. A legtöbb beküldőnk így látta a tennivalókat, mert eddigi tanulmányaik folyamán – ha valaminek a létezését (ami itt a megegyezés megismétlődése) egyáltalán bizonyították –, ezt konkrét példa megadásával tették.

I. megoldás. Az észrevétel helyes, a 3^{18}, 3^{19}, 3^{20} hatvány utolsó három jegyével írt szám – más szóval háromjegyű végződésük – rendre a 489, 467, 401 szám,[1] a 10^2 értékű helyen álló számjegy mindháromban a 4-es.

Azon múlik a 4-es megismétlődése, hogy amikor 3^{19} háromjegyű végződése céljára képezzük a $3^{18} \cdot 3$ szorzat végződését, a $(400+89)\cdot 3$ végződéseként $200+267=467$ adódik, majd ennek 3-szorosából a $200+201=401$ végződés, tehát a 4 százasnak a 3-szorosa és a kétjegyű végződés 3-szorosából adódó százas átvitel együtt ismét 4-esre végződik. (Felhasználtuk itt, hogy két természetes szám szorzatának háromjegyű végződése a tényezőknek is csupán a háromjegyű végződésétől függ. Ha ugyanis $A=1000\alpha+a$ és $B=1000\beta+b$ – ahol mindegyik betű természetes számot jelöl, és $0\le a,\, b<1000$ –, akkor

$$AB=1000\,(1000\alpha\beta+a\beta+b\alpha)+ab=1000\gamma+ab,$$

γ is természetes szám, ami szerint AB végződése megegyezik ab végződésével.)

Ezek szerint a $4\cdot 10^2$-nek 3 egymás utáni hatványban való fellépése megismétlődnék, ha találnánk 3-nak olyan további hatványát, melynek háromjegyű végződése ismét a 489 lenne.

Ilyen ismétlődés keresésére nyit lehetőséget annak észrevétele, hogy 3^{20}-nak *kétjegyű* végződése 01. Ebből előre látható, hogy 3^{21}, 3^{22}, 3^{23}, ... kétjegyű végződése 03, 09, 27, ... lesz, akárcsak 3^1, 3^2, 3^3, ... kétjegyű végződése, és azt sejtjük, hogy a 3 hatványainak sorozatában a kétjegyű végződés 20-asával ismétlődik (amint az egyjegyű végződés már 4-esével ismétlődik). Valóban, minden n természetes kitevő esetén 3^{n+20} kétjegyű végződése egyezik 3^n végződésével, mert különbségük osztható 100-zal, hiszen $3^{n+20}-3^n=3^n(3^{20}-1)$ és a második tényező osztható vele, lévén a háromjegyű végződése 400.

Ehhez hasonlóan a *háromjegyű* végződések periodikus ismétlődése várható 3-nak olyan hatványától kezdve, melynek háromjegyű végződése 001. Ilyen kitevőt a 20 többszörösei közt, 20 k alakban várhatunk. Mármost $k=2$ nem ilyen, mert 401^2 végződése 801; nem ilyen $k=3$ és 4 sem, mert $801\cdot 401$ végződése 201, ill. $201\cdot 401$-é 601 (a végződés százasa 4-esével nő); viszont $k=5$ megfelel, vagyis $20\cdot\cdot 5=100$ már periódusa a háromjegyű végződésnek, mert $601\cdot 401$ végződése 001. Mindezek szerint a feladat első kérdésére a válasz igenlő, a $3^{18+100k}$, $3^{19+100k}$, $3^{20+100k}$ hatványokban $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ a 10^2 értékű számjegy 4-es.

Igenlő a válasz a második kérdésre is, az előzőkből kapjuk, hogy a 3^{100k}, 3^{1+100k}, 3^{2+100k}, 3^{3+100k}, 3^{4+100k} hatványokban $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ ugyanúgy 0 a 10^2 értékű számjegy, mint 3^0-ban és az első 4 hatványban: 001, 003, 009, 027 és 081-ben, itt 5–5 egymás utáni hatvány százas jegye egyezik.

Megjegyzések. 1. Könnyű utánaszámolni, hogy ismétlődés van a 10^2 értékű helyen minden $3^{55+100k}$, $3^{56+100k}$, $3^{57+100k}$ hatványhármasban is, ezekben az 5-ös jegy ismétlődik.

2. Az iskolai függvénytáblázatban a 10^3 helyen való számjegyismétlődésre is látunk példát: 3^{27}, 3^{28}, 3^{29} és 3^{30} ezres jegye 4-es. Meg lehet mutatni, hogy ez ismétlődik, ha a kitevőket 500-asával növeljük.

3. Az 1211. gyakorlatban[2] azt láttuk 3 hatványairól, hogy tízes jegyük mindig páros, egyes jegyük 1, 3, 7 vagy 9. Ezekből is kihozható, hogy 3^{20} végződése 01.

II. megoldás. A 3^n (n természetes szám) hatványokat egymás után, n-et 1-esével növelve gondoljuk magunk elé írva, vagyis 3-mal való egymás utáni szorzás útján képezzük őket. Így 3^{r+1}-nek 10^2 helyi értékű számjegyét nyilvánvalóan egyértelműen meghatározza 3^r-nek utolsó három jegye, azaz háromjegyű végződése. Ezért, ha valamilyen R kitevő mellett 3^R háromjegyű végződése ugyanaz, mint 3^r végződése és $R>r$, akkor 3^{R+1}, 3^{R+2}, ... végződése is rendre egyezik 3^{r+1}, 3^{r+2}, ... végződésével. Eszerint a feladat első kérdése erre egyszerűsödik: „Várható-e, hogy 3^{18}-nak háromjegyű végződése megismétlődjék egy, a 18-nál nagyobb kitevőjű hatványban?"

Nos, a 3^n hatványok helyett csak a háromjegyű végződést tekintve, ezek sorozatában legkésőbb az 1001. végződésben beáll az ismétlődés, hiszen az előforduló különböző végződések száma nem lehet nagyobb, mint a legföljebb három számjeggyel leírható nemnegatív egész számok száma, ez pedig 1000. Így már csak ez a kérdés: „Kisebb-e 18-nál (vagy legalább egyenlő-e 18-cal) az első olyan 3^n hatványnak a kitevője, amelynek háromjegyű végződése később *elsőként* ismétlődik meg?" Elképzelhető ugyanis az is, hogy nem minden előfordult végződés ismétlődik meg, és a mondott n legkisebb kitevő nagyobb, mint 18.

Jelöljük mármost m-mel azt a legkisebb kitevőt, amelyre 3^m háromjegyű végződése megegyezik egy már előfordult végződéssel, éspedig 3^n-nek végződésével. Ez azt jelenti, hogy a $3^m-3^n=3^n(3^{m-n}-1)$ különbség – új alakja szerint viszont szorzat – osztható 1000-rel. Ámde 3^n és az $1000=2^3\cdot 5^3$ relatív prímek egymáshoz képest, emiatt a zárójelbeli tényező osztható 1000-rel, azaz $3^{m-n}-1=1000a$, ahol a természetes szám. Ekkor pedig $3^{m-n}-1=1000a+1$, azaz 3^{m-n}-nek háromjegyű végződése 001, ennélfogva 3^{m-n+1} háromjegyű végződése 003, és ugyanennyi a végződés 3^1, a hatványok sorozata első tagjának esetében. Azt, kaptuk tehát, hogy $n=1$.

[1] Lásd pl. az iskolai függvénytáblázatok 15. sz. táblázatában.

[2] K. M. L. 39 (1969) 18.

Összefoglalva ezeket találtuk: van olyan legkisebb m kitevő, hogy 3^m végződése egyenlő egy korábbi 3^n hatvány végződősével, az elsőként ismétlődő végződéshez eredetileg az $n=1$ kitevő tartozik, ez tehát kisebb, mint 18. Kimondhatjuk tehát, hogy a feladat első kérdésére igenlő a válasz (annak ellenére, hogy m értékét itt nem határoztuk meg). – Az alapul szolgáló egyezést (3^{18}-ban, 3^{19}-ben és 3^{20}-ban) ellenőrzés nélkül fogadtuk el, a feladat szövege szerint nem fér kétség a kijelentés helyes voltához.

A második kérdésre azért igenlő a válasz, mert 3-nak első 4 hatványa 100 alatt van, tehát százas jegyük megegyezően 0, és – mint már tudjuk – a $003, 009, 027, 081$ végződések valahonnan kezdve ugyanebben a sorrendben megismétlődnek. (Az így kimondott 4 hatvány kevesebb az I. megoldásbeli 5-nél, de elég ahhoz, hogy mondhassuk: létezik 3-*nál több* egymás utáni, a százas jegyben megegyező hatvány.)

Megjegyzés. Az n kitevő fenti meghatározása helyett így is okoskodhatunk. Megmutatjuk, hogy ha a 3^p és 3^q hatványok ($q>p$) háromjegyű végződése egyenlő, akkor a 3^{p-1} és 3^{q-1} hatványok háromjegyű végződése is egyenlő. Ebből már következik, hogy elsőként csak olyan 3^p hatvány háromjegyű végződése ismétlődhet meg, amelyhez nincs a hatványok sorozatában megelőző 3^{p-1} tag, vagyis $p=1$. (A záró következtetés (ti. 3^{18}-ra) már azonos a fentivel.)

Más szóval ezt akarjuk bizonyítani: 3 bármelyik hatványának háromjegyű végződése az 1-gyel kisebb kitevőjű hatvány végződését is egyértelműen meghatározza.

Gondoljunk ugyanis arra a (3-mal való) osztásra, amellyel 3^p-ből 3^{p-1} értékét „visszaszámítjuk”, és legyen 3^p-nek háromjegyű végződése $\overline{ABC}=100A+10B+C$. Mi volt az az r osztási maradék, amelyhez 3^p-nek százasát, az A számjegyet vettük le? Ha $A+B+C$ osztható 3-mal – vagyis maga $\overline{ABC}$ is osztható vele –, akkor a 3^p-ből a végződés elhagyásával kapott N szám is osztható 3-mal, hiszen 3^p osztható vele, ekkor tehát $r=0$. Így 3^{p-1} háromjegyű végződése az $\overline{ABC}:3$ osztás (egész) hányadosa ($A<3$ esetén is három jeggyel írva).

Ha viszont az $(A+B+C):3$ osztás maradéka 1 vagy 2, akkor N számjegyei összegét 3-mal osztva a maradék 2, ill. 1, ennyi tehát az $N:3$ osztás r maradéka is, így pedig 3^{p-1} háromjegyű végződését a $(2000+\overline{ABC}):3$, ill. az $(1000+$ $+\overline{ABC}):3$ hányadosa adja. Tehát 3^{p-1} háromjegyű végződése valóban mindig egyértelműen adódik $\overline{ABC}$-ből.

Eredményünkből az is következik, hogy az ismétlődő 003 végződéseket mindig a 001 végződés előzi meg, tehát a 0 jegy 5 egymás utáni hatvány százasában ismétlődik meg.

Polyák Gábor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)