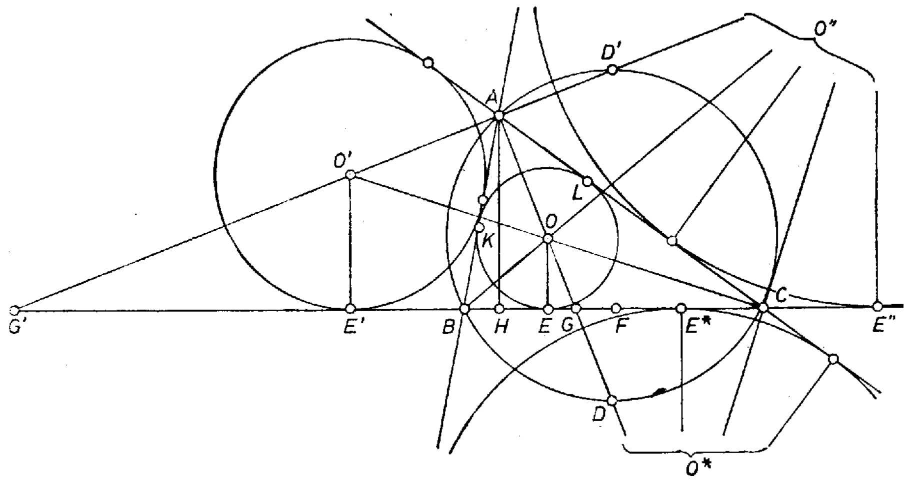
I. Legyenek a mondott E, F, G, H pontok az ABC háromszög BC oldalegyenesén és jelöljük a háromszög oldalait szokás szerint a, b, c betűvel.



Válasszuk úgy a betűzést, hogy $AB = c < AC = b$ (ugyanis $b = c$ esetén a 4 pont egybeesik, az állítás semmitmondó). Föltevésünk mellett viszont a 4 pont különböző egymástól – az állításbeli 4 szakasz egyike sem 0 –, és a pontok sorrendje is egyértelmű. Ugyanis mivel az A csúcs – és vele H is – az F-ben emelt f merőlegesnek B-t tartalmazó partján van, azért ott van E és G is, mert az A-beli szögfelező átmegy f és a háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének D felezőpontján, és G, valamint a beírt kör O középpontja az AD húron van; és mivel még $DG < DO < DA$, azért $FG < FE < FH$, tehát a pontok sorrendje C, F, G, E, H, B; a H pont egybeesik B-vel, ill. túlesik rajta, ha $CBA\sphericalangle \geq 90°$.

Ezek alapján a négy pontnak B-től mért távolságaiból az állításbeli négy szakasz hossza kiszámítható. Mindjárt elsőnek $BF = a/2$. A szögfelező osztási aránya alapján $BG = ac/(b + c)$. A beírt körhöz a csúcsokból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján, a kör, AB-n levő K és AC-n levő L érintési pontját is felhasználva

$$BE = \frac{BK + BE}{2} = \frac{BA + BC - (AL + CL)}{2} = \frac{c + a - b}{2}.$$

Végül az AHB és AHC derékszögű háromszögek közös befogójára, $BH = x$ jelöléssel, fennáll

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2, \qquad c^2 - x^2 = b^2 - (a \mp x)^2,$$
$$x = \pm\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

(az alsó előjelek akkor érvényesek, ha $CBA\sphericalangle > 90°$).

Ezekből kivonással, H esetében BH irányát is figyelembe véve:

$$EG = BG - BE = \frac{(b - c)(b + c - a)}{2(b + c)},$$
$$FH = BF \mp BH = \frac{(b - c)(b + c)}{2a},$$
$$EF = BF - BE = \frac{b - c}{2},$$
$$EH = BE \mp BH = \frac{(b - c)(b + c - a)}{2a},$$

és tüstént látjuk, hogy a felső két kifejezés szorzata egyenlő az alsó kettőével, az állítás helyes.

II. A hasonló összefüggések keresésében E helyén három külső érintő (hozzáírt) kör érintési pontja jön szóba, legyen ez a BC, BA, CA oldalhoz hozzáírt kör esetében rendre E^*, E', E''. Közülük az első kör O^* középpontja ugyancsak az AG szögfelezőn van rajta, az utóbbiak O', O'' középpontja pedig a BAC szög külső szögeinek AG' felezőjén, tehát G-t csak az utóbbi két esetben pótoljuk G'-vel. Így a következő három összefüggés várható:

$$E^*G \cdot FH = E^*F \cdot E^*H, \quad E'G' \cdot FH = E'F \cdot E'H, \quad E''G' \cdot FH = E''F \cdot E''H. \tag{1}$$

A fentiekhez hasonlóan adódik, hogy új pontjaink sorrendje a BC egyenesen a következő: G', E', B és H a fentiek szerint, F, E^*, C, E'', valamint hogy az új pontok B-től mért távolságának abszolút értéke:

$$BG' = \frac{ac}{b - c}, \quad BE' = \frac{b + c - a}{2}, \quad BE^* = \frac{a + b - c}{2}, \quad BE'' = \frac{a + b + c}{2}.$$

Ezek alapján a fentihez hasonló számítás mutatja, hogy az (1) egyenlőségek mindegyike helyes.