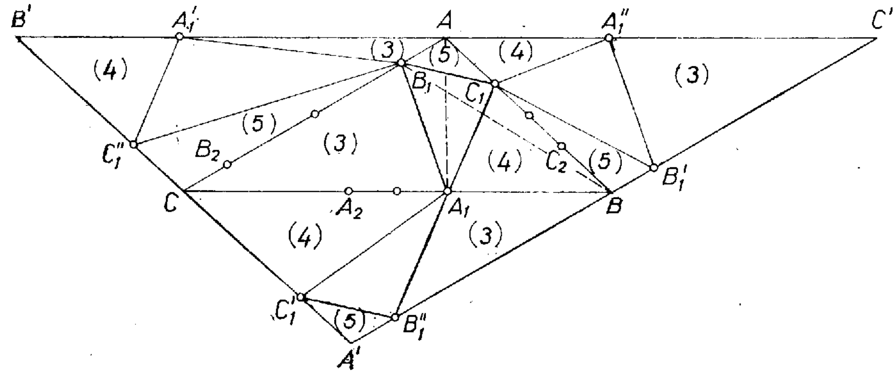
I. megoldás. 3 alkalmas tükrözéssel elérjük, hogy a vizsgálandó háromszögeket külön–külön látjuk. Tükrözzük először az eredeti ABC háromszöget és – az (1)-ben utolsó – $A_2B_1C_1$ háromszöget a BC oldal felezőpontjára, így B és C egymásba mennek át, A_2 képe A_1 lesz, és jelöljük A, B_1, C_1 képét rendre A'-vel, B_1''-vel, C_1'-vel (1. ábra).



1. ábra

Legyen hasonlóan az eredeti és az $A_1B_2C_1$ háromszög tükörképe a CA oldal felezőpontjára $CB'A$, $A_1'B_1C_1''$, végül az eredeti és az $A_1B_1C_2$ háromszög képe az AB oldal felezőpontjára BAC', ill. $A_1''B_1'C_1$. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy az

(2) $$A_1B_1C_1, \qquad A_1B_1''C_1', \qquad A_1'B_1C_1'', \qquad A_1''B_1'C_1$$

háromszögek területének az összege egyenlő az ABC háromszög területével, ez nyilvánvalóan egyértelmű a feladat állításával. Azt mutatjuk meg, hogy ha a (2) háromszögeket kivágjuk az $A'B'C'$ háromszögből, a visszamaradó részek összterülete egyenlő az ABC háromszög területének 3-szorosával. Állításunk ebből következik, hiszen az $A'B'C'$ háromszög területe 4-szer akkora, mint az ABC háromszög területe.

Vizsgáljuk először a visszamaradó résznek azokat a háromszögeit, melyek C-re vagy ennek tükörképeire támaszkodnak, az

(3) $$A_1B_1C \qquad A_1BB_1'', \qquad AA_1'B_1, \qquad A_1''C'B_1'$$

háromszögeket. Mivel B_1'' és B_1 szimmetrikusak BC felezőpontjára, azért e két pont egyenlő távolságra van a BC egyenestől és az A_1BB_1'', A_1BB_1 háromszögek területe egyenlő. Így a (3)-beli első két háromszög területének összege egyenlő a BB_1C háromszög területével. Ugyanígy kapjuk, hogy $AA_1'B_1$ területe egyenlő AA_1B_1 területével, az $A_1''C_1'B_1'$ háromszög pedig egybevágó A_1B_1C-vel, tehát a (3)-beli utolsó két háromszög területének összege egyenlő az AA_1C területével.

Ugyanígy kapjuk, hogy a B-re vagy B valamelyik tükörképére támaszkodó

$$A_1BC_1, \qquad A_1CC_1', \qquad A_1'B'C_1'', \qquad A_1''AC_1$$

háromszögek területének összege egyenlő az AA_1B és CC_1B háromszögek területének összegével, és hogy az A-ra és tükörképeire támaszkodó

$$AB_1C_1, \qquad A'B_1''C_1', \qquad B_1CC_1'', \qquad BB_1'C_1$$

háromszögek területének összege egyenlő BB_1A és CC_1A területének összegével.

A kapott 6 háromszög viszont párokba állítható úgy, hogy páronként összeálljon belőlük az ABC háromszög: AA_1C és AA_1B, BB_1A és BB_1C, CC_1A és CC_1B. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

II. megoldás. Azt fogjuk bizonyítani, hogy az

$$A_1B_1C_2, \quad A_1B_2C_1, \quad A_2B_1C_1$$

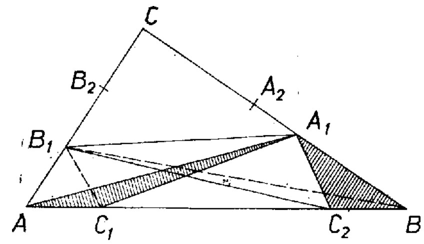
háromszögek területének az összege egyenlő az

$$AB_1C_1, \qquad A_1BC_1, \qquad A_1B_1C$$

háromszögek területének összegével. Ebből következik feladatunk állítása, mert az utóbbiak az $A_1B_1C_1$ háromszöggel együtt kiadják az ABC háromszöget. Bizonyításunk során egy egyenesvonalú síkidom területét röviden úgy jelöljük, hogy felsoroljuk egymás utáni csúcsait, és ezeket zárójelbe tesszük. Ezzel a jelöléssel állításunk az

(4) $$(A_1B_1C_2) + (A_1B_2C_1) + (A_2B_1C_1) = (AB_1C_1) + (A_1BC_1) + (A_1B_1C)$$

egyenlőséget jelenti.



2. ábra

Egészítsük ki az $A_1B_1C_2$ háromszöget A_1BC_2-vel négyszöggé, és ezt vágjuk ketté a másik átlójával (2. ábra):

$$(A_1B_1C_2) = (A_1B_1C_2B) - (A_1BC_2) = (A_1BB_1) + (BB_1C_2) - (A_1BC_2).$$

Itt az A_1BC_2 háromszög területe egyenlő A_1AC_1 területével, mert A_1 csúcsuk és az ezzel szemközti oldaluk egyenese közös, továbbá az A_1-gyel szemközti oldaluk hossza is egyenlő, hiszen a BC_2 szakaszt az AB szakasz felezőpontjára tükrözve AC_1-et kapjuk. Ugyanígy bizonyítható, hogy $(BB_1C_2) = (AB_1C_1)$, tehát

$$(A_1B_1C_2) = (A_1BB_1) + (AB_1C_1) - (AA_1C_1).$$

(Kiküszöböltük a 2-es indexeket.) Az (1) bal oldalán álló másik két terület ugyanígy alakítható át:

$$(A_1B_2C_1) = (AA_1C_1) + (A_1B_1C) - (B_1CC_1),$$
$$(A_2B_1C_1) = (B_1CC_1) + (A_1BC_1) - (A_1BB_1).$$

Ezt a három egyenlőséget összeadva a bizonyítandó (4) egyenlőséget kapjuk, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.