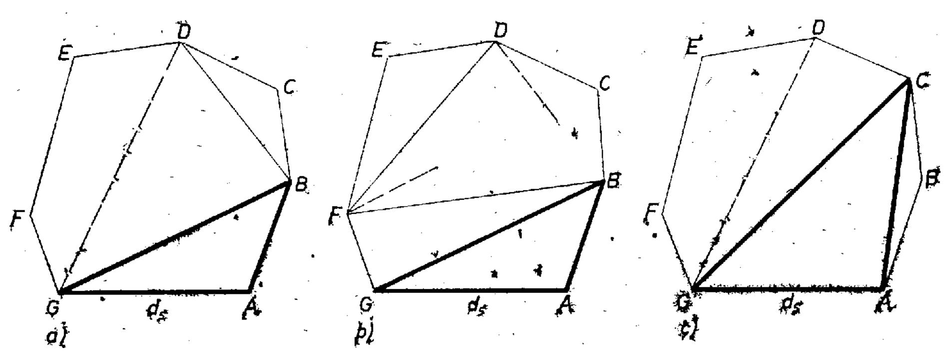
I. Legyen a végrehajtott felbontás háromszögeinek száma h, így oldalainak száma $3h$ (az átlókat mindkét oldalukon levő háromszögekben számítva), és a bennük levő szögek összege $h \cdot 180°$. Minden ilyen szög azonos vagy a felbontandó sokszög valamelyik szögével – ti. akkor, ha ennek a szögnek a csúcsából egyetlen átlót sem húztunk meg –, vagy pedig a sokszög egy szögének egy részével, mert minden háromszög csúcsai a sokszög csúcsai közül valók, hiszen a berajzolt átlók belső pontjaiban nem keletkezhetnek új csúcsok. Így $h \cdot 180°$ egyenlő a sokszög $(n-2)$ $180°$-nyi szögösszegével, ahol n a sokszög oldalainak száma, ebből $h = n-2$, esetünkben $h = 10$, a megrajzolandó átlók száma pedig $(3h-12) : 2 = 9$, ugyanis a felbontó átlók 2–2 háromszöghöz tartoznak hozzá, a sokszög oldalai pedig csak 1–1 háromszöghöz.

Az előttünk álló Sz_{12} szabályos tizenkétszögnek 5-féle átlója van, ti. olyanok, amelyekkel a két partjukra jutó $12 - 2 = 10$ csúcs közül az egyik parton 1, 2, 3, 4, illetve 5 csúcs van; mondjuk rendre d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 típusúnak az ilyen átlókat. d_1 típusú átló legalább 2 lép föl bármely $n(\geq 5)$ oldalú sokszög háromszögekre való felbontásában, mert a sokszög n oldala legföljebb $n-2$ háromszög között oszlik el, és ha egy háromszögbe két sokszögoldal tartozik, egyik végpontjuk szükségképpen közös, tehát a háromszög vele szemben levő oldala d_1 típusú átló.

Nem fordulhat elő viszont az előírt típusú felbontásban d_2 típusú átló, mert az ilyen által lemetszett négyszöget még tovább kellene bontanunk valamelyik – de csak az egyik – átlójával, és ezek bármelyikét megrajzolva, a d_2 egyik partjára esett 2 csúcs egyike 2, azaz páros számú háromszögbe tartoznék bele, a követelménnyel ellentétben.

Megmutatjuk, hogy nem rajzolhatunk be d_5 típusú átlót sem. Egy ilyen az Sz_{12}-t két hétszögre vágja, legyen egy ilyen $ABCDEFG$, ahol AG a d_5 típusú átló (1. ábra). Az ezt oldalként tartalmazó háromszög harmadik csúcsa nem lehet D, mert az AD átló d_2 típusú, így (a szimmetria alapján) elég B-t és C-t próbálni harmadik csúcsként.

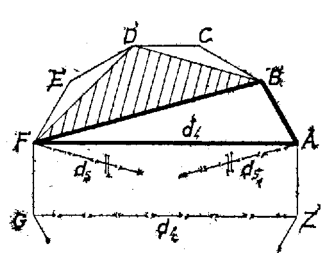


1. ábra

Ha BAG egy háromszöge a felbontásnak, akkor B-ből még vagy 1 vagy 3 átló húzandó meg – hiszen a követelmény így is kimondható: amelyik csúcsból indul átló, onnan páros számú átlónak kell indulnia. Ámde 3 további átló nem húzható, mert köztük lenne BE, így csak BD-re és BF-re gondolhatunk (1. ábra *a)* és *b)* része). Az előbbi kényszerítően maga után vonná a kizárt GD-t, az utóbbi pedig FD-t, és ekkor a $BCDF$ négyszög egyik átlójával sem bontható.

Ha pedig a CAG háromszög oldalává tesszük meg AG-t (1. *c)* ábra), evvel C-ből már 2 átló indul ki, többet CF miatt nem húzhatunk, ekkor pedig a kizárt DG-re kényszerülnénk. Így valóban nem húzható d_5 típusú átló.

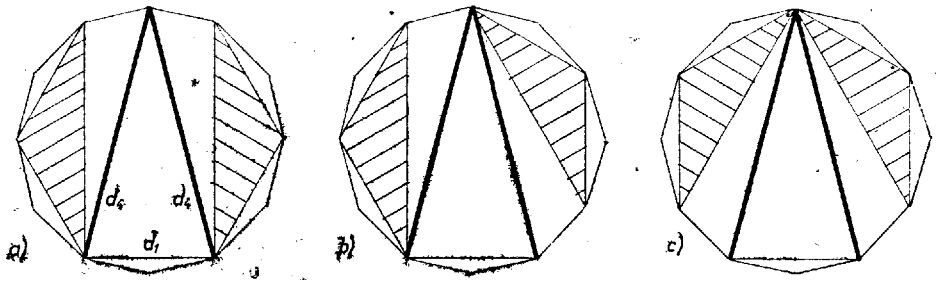
A d_4 átlók hatszöget metszenek le, egy ilyenben (2. ábra $ABCDEF$, a lemetsző átló AF) a hétszög fenti esetéhez hasonlóan elég a BAF háromszöggel indulnunk.


2. ábra

B-ből csak D-be, onnan pedig csak F-be mehet a második átló, ekkor a B, C, D, E csúcsok rendre 3, 1, 3, 1 háromszöghöz tartoznak, ez tehát megfelelő felbontás, a csatlakozó A, F csúcsokból pedig eddig páratlan számú átló indul ki.

Látni fogjuk, hogy d_3 típusú átlók is használhatók lesznek. Könnyen adódik a lemetszett csúcsok, valamint a lemetsző átlók végpontjainál felhasznált csúcsok számából, hogy d_4-ből legföljebb 2-t rajzolhatunk, d_3-ból 3-at, d_1-ből pedig 6-ot.

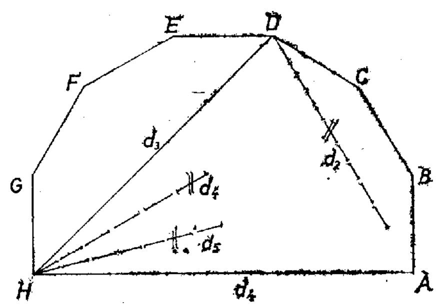
II. Ezek alapján rátérve a próbálgatásokra, 2 db d_4-es átló nem állhat külön végpontokkal (más szóval párhuzamosan, 2. ábra, AF és ZG), mert a köztük keletkező négyszög mindkét átlója d_5 típusú (másképpen: A-ból is, F-ből is kellene indítani átlót, hogy számuk párossá váljék). Ha viszont a 2 db d_4 átló egyik végpontja közös, akkor nem közös végpontjaikat d_1 átló köti össze, így a 3 végpontjuk mindegyikéből eddig 2–2 átló indul ki, és a d_4-eseken kívül keletkező két hatszögbe – most már az Sz_{12} szimmetriát is tekintetbe véve – 3 lényegesen különböző módon másolhatjuk be a 2. ábra hatszögének (egyetlen lehetséges) felbontását (3. ábra *a), b), c)* része).



3. ábra

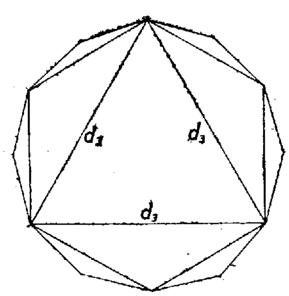
A szerepére először mindkettőben a 2 db d_4-es átló közös csúcsát véve, majd e szerepet az egyik hatszögben, végül mindkettőben a d_4-es átló nem-közös végpontjának átadva. Ezzel 3 különböző megoldását kaptuk feladatunknak.

Nem lehetséges olyan felbontás, melyben csak 1 db d_4-es átlót engedünk meg, mert a másik oldalán keletkező nyolcszögben (4. ábra) az AH-t tartalmazó háromszög harmadik csúcsa B, C, D egyike sem lehet $HB = d_5$, $HC = d_4$ és $AD = d_2$ miatt.



4. ábra

d_4-es átló nélküli felbontásban a 9 berajzolandó átló céljára igénybe kell vennünk a fönt látott legnagyobb számokat, és a 3 db d_3-as, 6 db d_1-es átló csak egyféleképpen rajzolható be (5. ábra). – Mindezek szerint a kívánt felbontások száma 4.



5. ábra

Torma Tamás (Székesfehérvár, Petőfi S. Ált. Isk. 8. o. t.) dolgozata alapján, néhány kiegészítéssel

Megjegyzés. Az 1174. gyakorlatban[1] a szabályos 9 szögről bizonyítottuk, hogy ugyanezen követelmény szerint csak egyféleképpen háromszögelhető.

Az 1967. évi Kürschák-verseny 2. feladata annak bizonyítása volt,[2] hogy csúcsonként páratlan számú háromszöget tartalmazva azok a konvex sokszögek háromszögelhetők, amelyek oldalainak száma osztható 3-mal.

[1] K. M. L. 37 (1968) 12. o.

[2] *Hajós György:* Az 1967. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása. K. M. L. 36 (1968) 193–202. o. élesebben 194.–197. o.