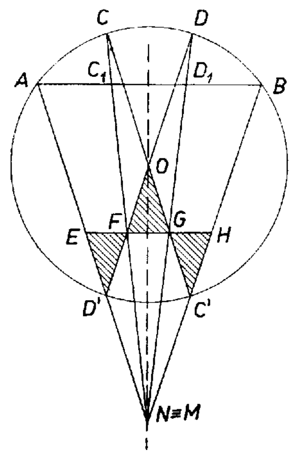
I. megoldás. Jelöljük a C, D pontokkal átellenes pontokat a körben C'-vel, D'-vel, és legyen AD', BC' metszéspontja N (1. ábra).

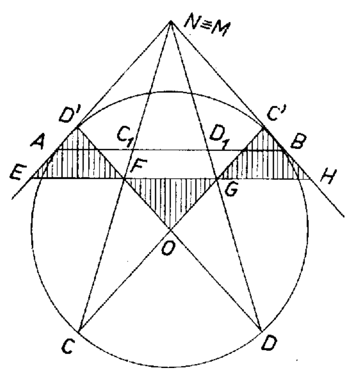


1. ábra

Mivel $AC = CD = D'C'$, és A és D' a CC' átmérőnek ugyanazon az oldalán van, azért $AD' \parallel CC'$. Hasonlóan $BC' \parallel DD'$, és az ANB, COD szögek egyállásúak, tehát egyenlők, tehát az ANB szög 1/3 akkora, mint az AOB szög. Azt fogjuk megmutatni, hogy N azonos M-mel – ezzel igazoljuk a feladat állítását.

Szerkesztésünk szerint a CD, AB, $C'D'$ egyenesek párhuzamosak, és a kapott alakzat szimmetria tengelye az ON egyenes. A $COND'$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak – hiszen $CDC'D'$ téglalap, CD' párhuzamos az ON tengellyel –, tehát ez a négyszög paralelogramma, és CN felezi OD'-t. Jelöljük metszéspontjukat F-fel, DN és OC' metszéspontját G-vel. Láttuk, hogy F felezi OD'-t, hasonlóan láthatjuk be, hogy G felezi OC'-t, tehát FG párhuzamos $D'C'$-vel. F-re tükrözve O képe D', az OC' egyenes képe a vele párhuzamos $D'A$ egyenes, ezen van G képe is, jelöljük ezt E-vel. Hasonlóan látható be, hogy F-nek G-re vonatkozó tükörképe, a H pont, a BC' egyenesen van. Ezek szerint F és G harmadolja az EH szakaszt, és $EH \parallel AB$. Tehát a CN, DN egyenesek harmadolják az AB szakaszt, vagyis azt a C_1, D_1 pontban metszik. Így a CC_1, DD_1 egyenesek M metszéspontja valóban azonos N-nel, feladatunk állítását bebizonyítottuk.

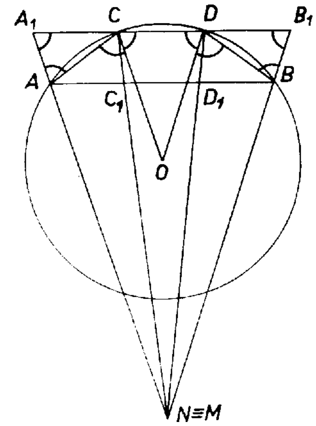
Megjegyzés. Az állítás akkor is érvényes, ha C és D a kör nagyobbik AB ívét harmadolják, ekkor természetesen a C, D pontokat tartalmazó, 180°-nál nagyobb AOB szögre vonatkozik az állítás (2. ábra).



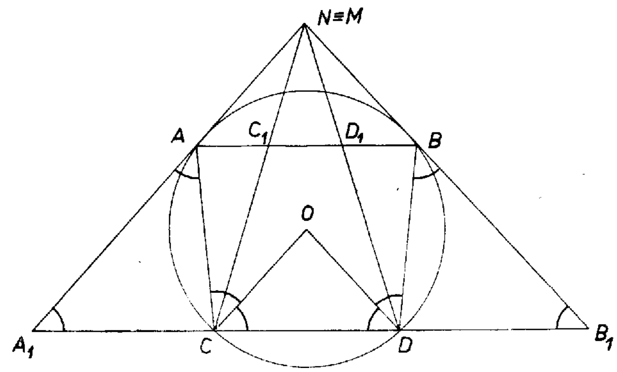
2. ábra

Ha ilyen esetben $AOB\sphericalangle = 270°$, akkor C' a B-ben, D' az A-ban adódik, és AD' egyenesként a kör A-beli érintője értendő, BC'-ként a B-beli érintő. Érdekes speciális eset az is, ha A és B egy átmérő végpontjai.

II. megoldás. Húzzunk párhuzamost CO-val A-n át, DO-val B-n át, legyen ezeknek a metszéspontja N (3. és 4. ábra).



3. ábra



4. ábra

Ekkor az ANB, COD szögek egyenlőek, vagyis az ANB szög egyenlő az AOB szög harmadával. Azt fogjuk megmutatni, hogy N azonos M-mel, ezzel bebizonyítjuk feladatunk állítását.

Messe a CD egyenest AN az A_1-ben, BN a B_1-ben. Az AA_1C, OCD szögek egyállásúak, A_1AC, ACO pedig váltószögek, ezek a szögpárok tehát rendre egyenlőek egymással. CO felezi az ACD szöget, így az ACO, OCD szögek is egyenlőek, és egyenlőek az előbbi párjaik is, az AA_1C háromszög AA_1 oldalán levő szögek. AA_1C tehát egyenlő szárú háromszög, $A_1C = AC$.

Hasonlóan $B_1D = BD$, és mivel $AC = BD$, ezekből következik, hogy $A_1C = CD = DB_1$, vagyis C és D harmadolja az A_1B_1 szakaszt. Mivel még $A_1B_1 \parallel AB$, ebből következik, hogy a CN, DN egyenesek is harmadolják az AB szakaszt, N tehát valóban azonos M-mel, amint azt bizonyítani akartuk.