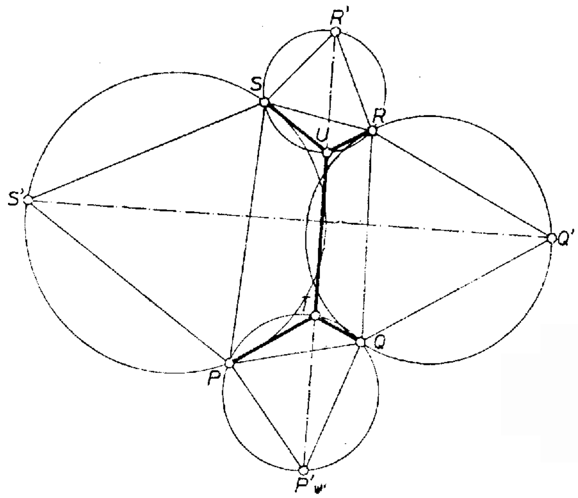
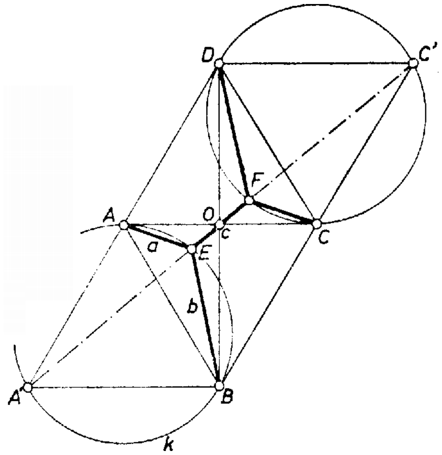
Az idézett helyen példát látunk arra (más betűzéssel), hogy ha a P, Q, R, S pontok egy konvex négyszög egymás utáni csúcsai, akkor hogyan állapítható meg a pontokat összekötő, minimális összhosszúságú útrendszer. A négyszög PQ, QR, RS, SP oldala fölé, kifelé szabályos háromszöget szerkesztünk, ezek új csúcsai rendre P', Q', R', S' (1. ábra).



1. ábra

Ekkor a mondott útrendszer összhossza egyenlő a $P'R'$ és $Q'S'$ távolságok kisebbikével. Ha ez $P'R'$ – azaz $P'R' \leqq Q'S'$ –, akkor a minimális útrendszer két hármas csomópontját, T-t és U-t megadta a $P'R'$ szakasznak rendre a PQP' és az RSR' háromszög köré írt körrel való metszéspontja, és az útrendszer a PT, QT, UR, US egyenesszakaszokból áll. (Így ugyanis a szabályos háromszögre ismert tétel szerint – amennyiben a mondott körökben T a rövidebbik PQ íven, ill. U a rövidebbik RS íven adódik, fennáll $PT+QT=P'T$, ill. $RU+SU=R'U$; persze azt is figyelembe vettük, hogy $TP' \leqq UP'$ volt.)

Ez az eredmény alkalmazható oázisaink pontnégyesére, és a megfelelően szerkeszthető $A'C'$ és $B'D'$ távolságok egyenlők, mert egymás tükörképei az $ABCD$ rombusz AC és BD átlóira; ezért az útrendszert elég $A'C'$-ből kiindulva terveznünk (2. ábra).



2. ábra

Nyilvánvaló, hogy A' a DA, C' pedig a BC rombuszoldal meghosszabbításán van, és $DA'=BC'=2AB$, tehát $A'BC'D$ paralelogramma és $A'C'$ átlója átmegy a rombusz O középpontján. Az O-ra való tükrözés egymásba viszi át A-t és C-t, hasonlóan B-t és D-t, így az építési költség felosztásában A és C része egyenlő, hasonlóan B-é és D-é is, elég tehát megállapítanunk A és B hozzájárulásának arányát.

Legyen az ABA' és a CDC' körnek $A'C'$-n levő pontja rendre E, F és jelöljük az AE, BE, $EF=2EO$ szakasz hosszát rendre a-val, b-vel, c-vel. Így A egy lakója $(4a+2b+2c)$ utat tesz meg, ha egyszer–egyszer elmegy a másik 3 oázisba, B egy lakója pedig $2a+4b+2c$ utat.

Az OAA' háromszög hasonló az OEA háromszöghöz, mert O-nál levő szögük közös és A-nál, ill. E-nél 120°-os szögük van ($OAA'\sphericalangle = OAB\sphericalangle + BAA'\sphericalangle = 2\cdot 60°$ és $OEA\sphericalangle = 180° - A'EA\sphericalangle = 180° - A'BA\sphericalangle = 120°$, hiszen $A'BEA$ húrnégyszög). És mivel e két háromszög egy pár megfelelő oldalára $AA' = AC = 2\cdot AO$, azért a nagyítási arány $2:1$, tehát $EA=a=2\cdot EO=EF=c$. Hasonlók az OAA' és AEB háromszögek is, mert az utóbbiban

$AEB\sphericalangle = 180° - AA'B\sphericalangle = 120°$, és a B-nél levő szög ugyanazon az AE íven nyugszik, mint az $AA'E$ szög; ezért $b = EB = 2 \cdot EA = 2a$.

Ezek szerint A és B részesedési aránya $10a : 12a = 5 : 6$, A és C egyenként $5/22$ részt, 22,7 %-ot, B és D egyenként $6/22 = 3/11$ részt, 27,3 %-ot viselnek a költségekből.

Megjegyzések. 1. Az Ibrahim által javasolt útrendszer hossza, mint könnyen kiszámítható, $15\sqrt{7} = 39{,}69$ km, valóban rövidebb a Hasszán által javasolt $15\,(1+\sqrt{3}) = 40{,}98$ km-nél, méginkább az Ali–javasolta $3 \cdot 15 = 45$ km-nél. – Az érkezett megoldások kiszámították az összes részutak hosszát. Ez természetesen nem hiba – bizonyára elvégezték ezt a tervező mérnökök is –, de a *kérdés megválaszolásához* – mint láttuk – elkerülhető.

2. Könnyű belátni, hogy az EO, EA, EB útszakaszok egyszersmind megadják az O, A, B pontok közti, minimális összhosszúságú útrendszert is. Ez tehát abban az E pontban fut össze, ahonnét az OA, AB, BO szakaszok mindegyike 120°-os szögben látható. – Megemlítjük, hogy ha egy háromszög legnagyobbik szöge nem éri el a 120°-ot, akkor mindig van ilyen pont a háromszög belsejében (szokás nevezni a háromszög *Torricelli*–féle pontjának). Ha viszont egy GHJ háromszögben a G-nél levő szög 120°-os, vagy nagyobb, akkor a minimális összhosszúságú útrendszer a GH és GJ szakaszokból áll.

3. A bevezetésül idézett példa természetesen nem jelenti a problémának 4 pont esetére való teljes megoldását. Az 1. ábráról sejtjük, hogy $P'R'$-nek P és Q között, valamint R és S között kell haladnia, másrészt a meggondolás érvényességének $P'T \leqq P'U$ is feltétele.