**I.** Első ránézésre látható, hogy ha $a=\varepsilon c$ és $b=\varepsilon d$, vagy ha $a=\varepsilon d$ és $a=\varepsilon c$, ahol $\varepsilon=1$ vagy $\varepsilon=-1$, akkor a bal oldalon álló két tag (a műveleti mínuszjel nélkül) azonos egymással, tehát egyenletünknek minden valós szám gyöke. Ebben az esetben a feladat állítása nem igaz, ezért fel kell termünk, hogy a bal oldal két tagja nem azonosan egyenlő.

Szorozzuk össze az ismeretlent tartalmazó tényezőket, és a második tagot vigyük át a jobb oldalra:

$$(a+b)^2\{x^2+x(c^2+d^2)+c^2d^2\}=(c+d)^2\{x^2+x(a^2+b^2)+a^2b^2\}.$$

Vonjunk ki mindkét oldalból $x(a+b)^2(c+d)^2$-t, ezzel elérjük, hogy az ismeretlent tartalmazó tényezők is teljes négyzetté válnak:

$$(a+b)^2\{x^2-2cdx+c^2d^2\}=(c+d)^2\{x^2-2abx+a^2b^2\},$$
$$(a+b)^2(x-cd)^2=(c+d)^2(x-ab)^2.$$

Két szám négyzete akkor egyenlő, ha e számok egyenlőek, vagy egymás $(-1)$-szeresei. Ennek megfelelően két eset lehetséges:

$$(a+b)(x-cd)(c+d)(x-ab) \qquad a)$$
$$(a+b)(x-cd)=(-c-d)(x-ab), \qquad b)$$

illetve a két eset egybeolvad, ha $a+b=c+d=0$. Ekkor (1)-ben nem lép föl $x$, a kérdés tárgytalan.

Mindkét esetben legföljebb elsőfokú egyenletet kaptunk $x$-re, így $x$ – ha egyáltalán létezik – mindenesetre a négy alapművelettel számítható ki az $a$, $b$, $c$, $d$ paraméterekből, amint feladatunk állítja.

**II.** Ami a gyök konkrét kifejezését illeti, a fenti két eset szerint rendre

$$x=\frac{(a+b)cd-(c+d)ab}{(a+b)-(c+d)}, \quad \text{hacsak } a+b\neq c+d \text{ ill.} \qquad a)$$
$$x=\frac{(a+b)cd+(c+d)ab}{(a+b)+(c+d)}, \quad \text{hacsak } a+b\neq -(c+d). \qquad b)$$

A kizárt esetekben, amennyiben

(2) $$|a+b|=|c+d|\neq 0,$$

(1)-et ezek négyzetével egyszerűsítve $x^2$ is kiesik, és az egyetlen gyök

$$x=\frac{a^2b^2-c^2d^2}{(c^2+d^2)-(a^2+b^2)},$$

racionális kifejezés. Ennek nevezője így is írható:

$$(c+d)^2-2cd-(a+b)^2+2ab=2(ab-cd),$$

ami csak az $ab=cd$ esetben válik 0-vá – és akkor a számláló is 0, ez a feltétel azonban (2)-vel összekapcsolva csak a már eredetileg kizárt esetekben teljesül, hiszen két szám értékét összegük és szorzatuk egyértelműen meghatározza. Az $ab\neq cd$ esetben még egyszerűbben

$$x=\frac{ab+cd}{2}$$

(az alakítás nem érinti már belátott racionális voltát).

*Filep János* (Budapest, I. István Gimn., II. o. t. )